

PLL digital (DPLL)

O PLL é encontra a cada dia mais aplicações em Telecomunicações, envolvendo modulação, síntese de frequências e especialmente sincronização nos sistemas analógicos e digitais. Tal como o AMP-OP, o PLL pode ser usado numa grande variedade de circuitos (livros do tipo: 100 aplicações de PLL, são comuns). Disponível em forma de circuitos integrados, onde poucos componentes externos precisam ser adicionados, o PLL basicamente é constituído por: um comparador de fase, um filtro passa-baixa (LPF), um amplificador DC e um oscilador controlado à tensão (VCO).

O comparador de fase proporciona uma saída proporcional a diferença de fase entre a onda de entrada e a onda de saída do VCO. Esta saída é suavizada e limitada em banda por um filtro LPF, amplificada e realimentada ao controle do VCO. O controle de "offset" do amplificador DC permite o ajuste inicial da frequência do VCO. Quando o circuito encontra-se amarrado (travado), as variações de fase/frequência da forma de onda de entrada (onda senoidal, quadrada ou sinal mais complexo) serão seguidas pela forma de onda de saída, mesmo quando a entrada é perturbada por ruído ou tremor de fase. Assim, o PLL é basicamente um *filtro rastreador*, capaz de gerar uma "versão mais limpa" do sinal aplicado na entrada. Mais especificamente, ruído da entrada é convertido em "jitter" na saída, que pode ser controlado por um projeto adequado dos componentes do PLL.

A operação do PLL é facilmente descrita e compreendida quando as formas de onda de saída são ondas quadradas. O comparador de fase neste caso é um OU-EXCLUSIVO, e o VCO é um astável controlado à tensão (VCA).

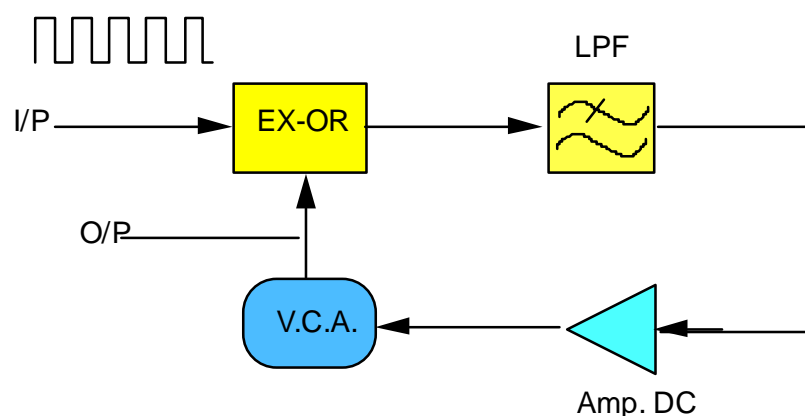
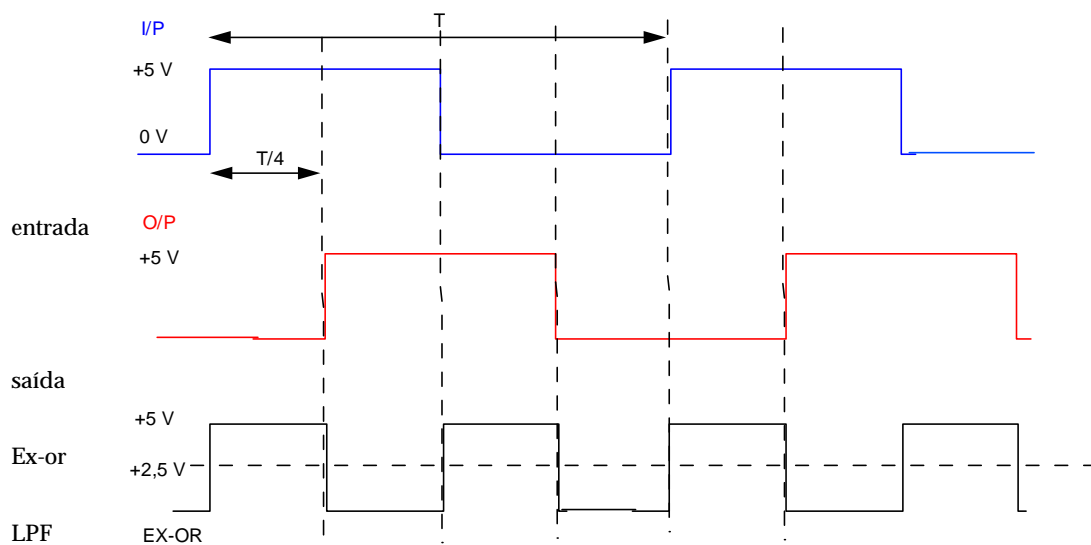


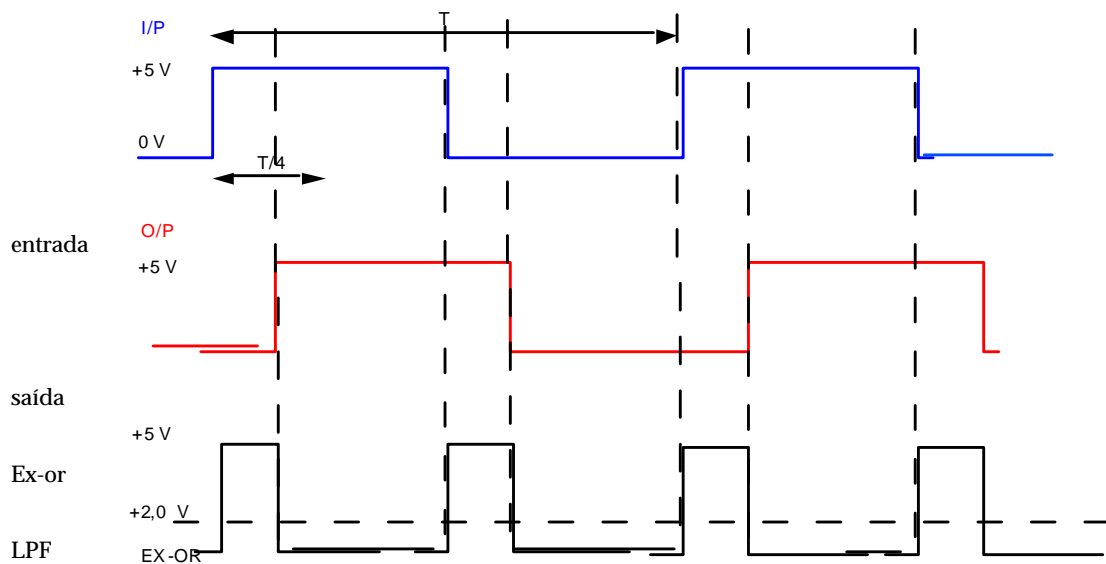
Figura. Circuito de PLL digital.

Se o PLL está estável, operação amarrada, as várias formas de onda envolvidas são mostradas abaixo:



Após a amplificação e ajustes de "*offset*", a saída do LPF controla a frequência do VCA. Nota-se que a malha é amarrada com uma forma de onda defasada de 1/4 de período com relação à forma de onda de entrada (equivalente a um deslocamento de fase de $\pi/2$).

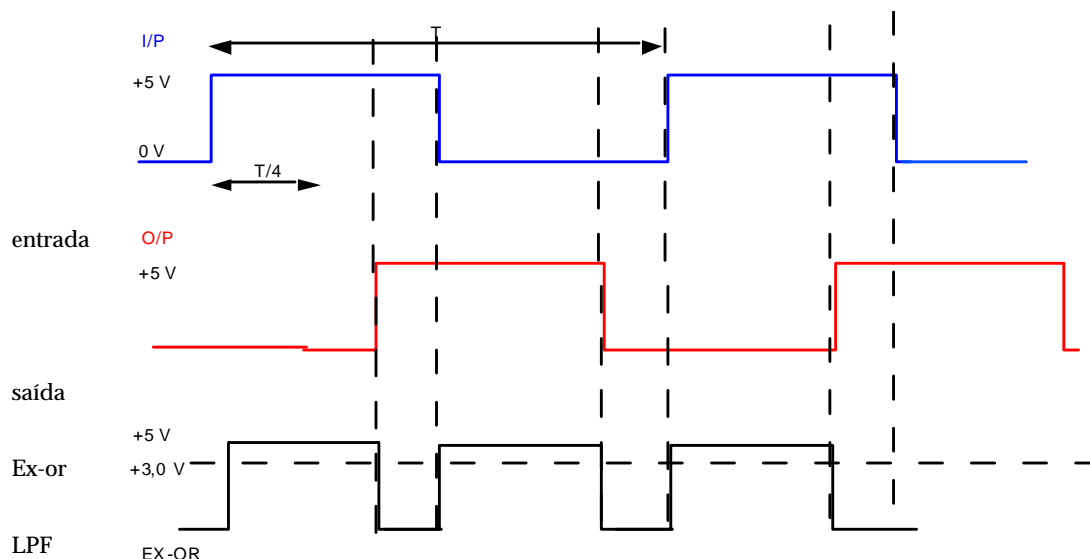
Assuma agora que momentaneamente a onda de entrada é ligeiramente atrasada, de modo que a diferença de fase entre a entrada e a saída é reduzida (veja figura abaixo).



Desde que o ciclo de trabalho da onda resultante na saída do ou-exclusivo é diminuído, o nível DC na saída do filtro tende a cair. Este decréscimo no AMP-DC causa uma diminuição na frequência de saída do VCA. Isto, por sua vez, tem um efeito de momentaneamente aumentar o atraso de fase entre as ondas de entrada e saída, pois a mudança na frequência é primeiramente percebida como uma mudança de fase. Assim, a

malha age de modo a corrigir a mudança na fase do sinal de entrada, ajustando a fase do sinal de saída até que ela esteja novamente a 90° com relação à forma de onda de entrada.

Se a forma de onda de saída é adiantada um pouco, este avanço faz crescer a diferença de fase com o sinal de saída e o oposto acontece (veja figura abaixo):



Como o ciclo de trabalho da onda resultante na saída do ou-exclusivo cresce, o nível DC na saída do filtro tende a aumentar. Este crescimento no AMP-DC resulta em um aumento na frequência de saída do VCA, que tem um efeito de momentaneamente diminuir o atraso de fase entre as ondas de entrada e saída. Assim, a malha novamente age de modo a corrigir a mudança na fase do sinal de entrada, ajustando a fase do sinal de saída até que ela esteja novamente a 90° com relação à forma de onda de entrada.

Na análise prévia foi assumido que a malha foi ajustada de modo a ter exatamente a mesma frequência do sinal de entrada. A faixa de controle determina a faixa de frequências que o PLL pode operar. Uma vez ajustado e funcionando modo "amarrado", a faixa de frequências (no modo LOCK-IN ou *Tracking*) na qual o PLL irá seguir o sinal de entrada é determinada pela sensibilidade do amplificador DC. Se o LPF é removido, alimentando diretamente ao amplificador, a faixa de rastreamento é praticamente idêntica a faixa de captura (faixa de frequências sobre a qual o PLL pode realizar uma captura), mas o ruído na entrada pode perturbar severamente a saída (*jitter*). Inserir o filtro LPF tem efeito de reduzir a faixa de captura e o projeto do PLL é um compromisso entre otimizar a faixa de rastreamento, a faixa de captura e a redução do tremor de fase. Quando a principal fonte de ruído situa-se fora da malha (i.e., no sinal de entrada), a banda-passante do filtro deve ser pequena; quando o inverso é verdade (i.e., o ruído provém do VCO), um filtro banda larga é mais apropriado.

O PLL é capaz de realizar uma filtragem em banda muito estreita; ele pode extrair uma portadora, por exemplo, de uma forma de onda modulada com ruído.

Um esquema de aplicação do PLL como um multiplicador de frequências é descrito abaixo.

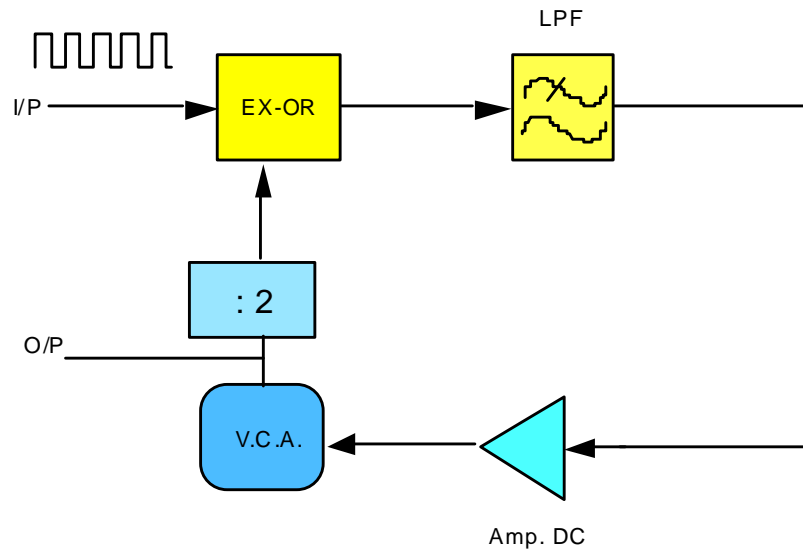


Figura. Esquema de um multiplicador de frequências $\times 2$.

Também é possível digitalizar completamente o PLL (o DPLL), fazendo uma conversão A/D na entrada. Filtros digitais podem ser usados para processar a forma de onda do erro de fase, dando maior flexibilidade ao projeto. A diferença de fase de 90° entre a entrada e a saída não é condição necessária no funcionamento do PLL (há PLLs com diferença de fase nula).

EXERCÍCIO- SINCRONIZAÇÃO POR MALHA DIGITAL

(Prof. Kawas-Kaleh, Telecom-Paris)

Deseja-se transmitir símbolos binários provenientes de uma modulação digital PSK. O sinal recebido é da forma

$$z(t) = \sqrt{2E_b} \sum_k \{a_k h(t - kT) \cos(2\pi f_0 t + q(t))\} + n(t),$$

com $a_k = \pm 1$.

Suponha ainda um ruído gaussiano com densidade espectral de potência $N_0/2$ na banda do sinal emitido e que o filtro $h(t)$ é tal que $h(t)*h(-t)$ verifica a condição de Nyquist.

A sincronização é realizada com auxílio de uma malha digital PLL esquematizada na figura abaixo. O oscilador comandado digitalmente fornece $\exp(-j\hat{f}_k)$ com $\hat{f}_{k+1} = \hat{f}_k + c_k$ em que c_k é o sinal de comando.

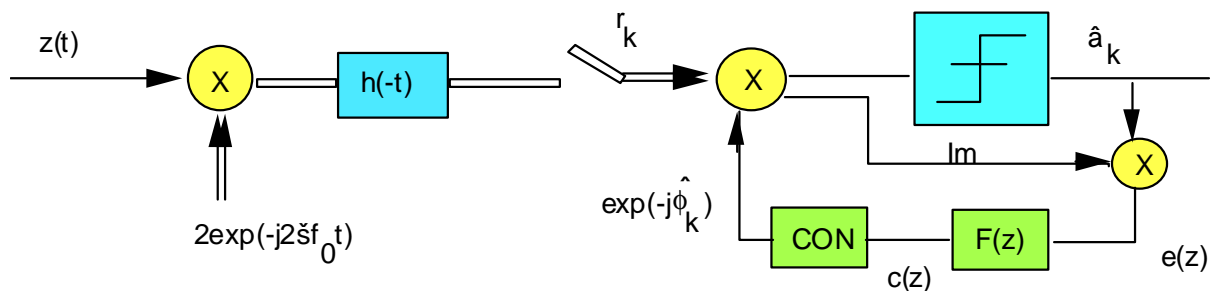


Figura. Sincronização de modulação digital PSK com malha digital (PLL).

- 1) Encontrar a expressão do sinal e_k e o esquema equivalente da malha. Assuma que $q(t)$ é uma fase desconhecida.
- 2) Determinar a função de transferência $G(z)$ da malha. Qual é seu efeito sobre o ruído? Mostrar que a ordem de $G(z)$ (grau do denominador de $G(z)$) é igual uma unidade a mais que a ordem de $F(z)$.
- 3) Supondo que a fase varia sob a forma $q(t) = q_0 + w_d t$, determinar a resposta de regime permanente, para uma malha de 1ª ordem ($F(z) = a$). Mostrar que o desvio de frequência não é corrigido e que q_0 é completamente compensado.
- 4) Para eliminar o desvio de frequência residual, emprega-se uma malha de 2ª ordem, $F(z) = a + \frac{b}{z-1}$. Explicar a escolha. Qual é a resposta em regime permanente da malha de 2ª ordem? Forneça um algoritmo de adaptação da fase.

PRELIMINARES: (modulação 2-PSK)

$$z(t) = \sqrt{2E_b} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k h(t - kT) \right] \cos[2\pi f_0 t + q(t)] + n(t),$$

com $a_k = \pm 1$, sendo E_b a energia por bit do sinal e f_0 a frequência da portadora.

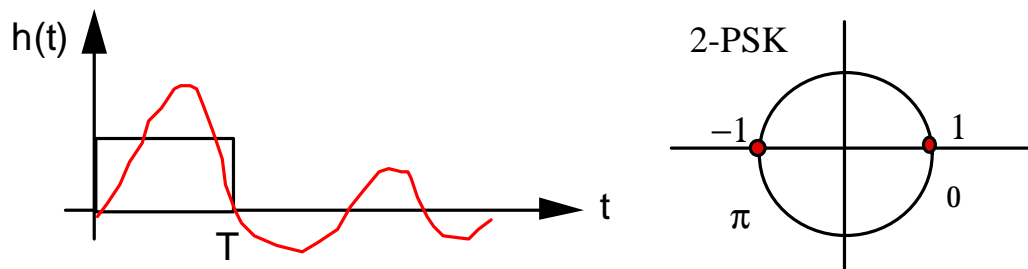
T é o intervalo símbolo (sinalização a $1/T$ bauds),

$q(t)$ é uma fase desconhecida,

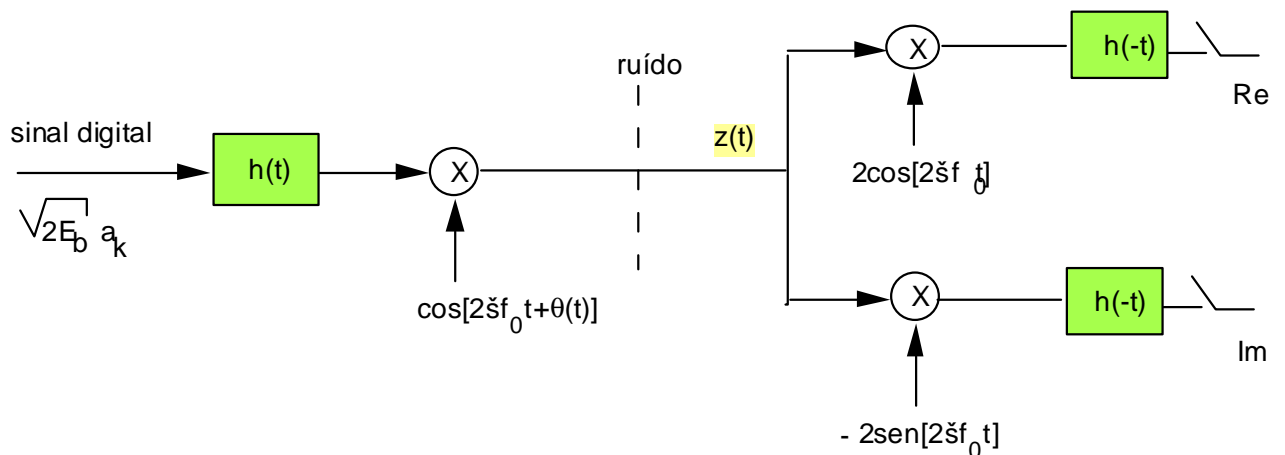
$h(t)$ é a impulsão usada (formatar o pulso),

$n(t)$ é o ruído representação em banda estreita.

Um formato típico para a filtragem $h(\cdot)$ é mostrado abaixo (tipo cosseno elevado).



O esquema de modulação/demodulação do sinal é mostrado na figura abaixo:



Sinais: $\Re r_k$ e $\Im r_k$. onde $r_k = \sqrt{2E_b} d_k + w_k$

Caso 1) Se $q(t)=0$, então $\Re r_k = \sqrt{2E_b} a_k + \Re w_k$ e $\Im r_k = \Im w_k$.

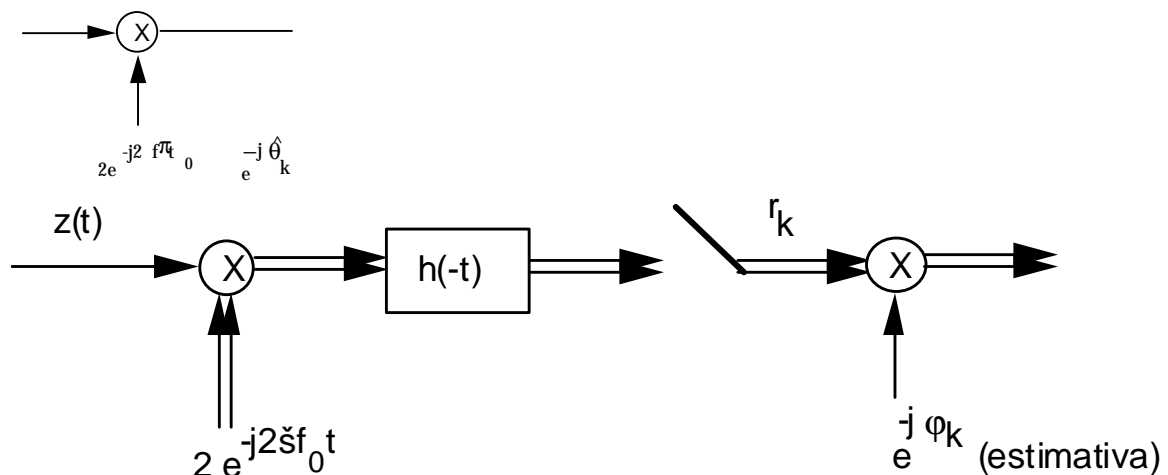
Lembrar que na representação do ruído, as componentes fase e quadratura são não

Supondo um caso mais geral e mais realista, suponha que \mathbf{q} apresenta contribuições devido a uma fase desconhecida (supostamente constante), um desvio de frequência (*doppler*) e um tremor de fase (*jitter*):

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \mathbf{w}_d t + \mathbf{j}(t)$$

Detecção coerente

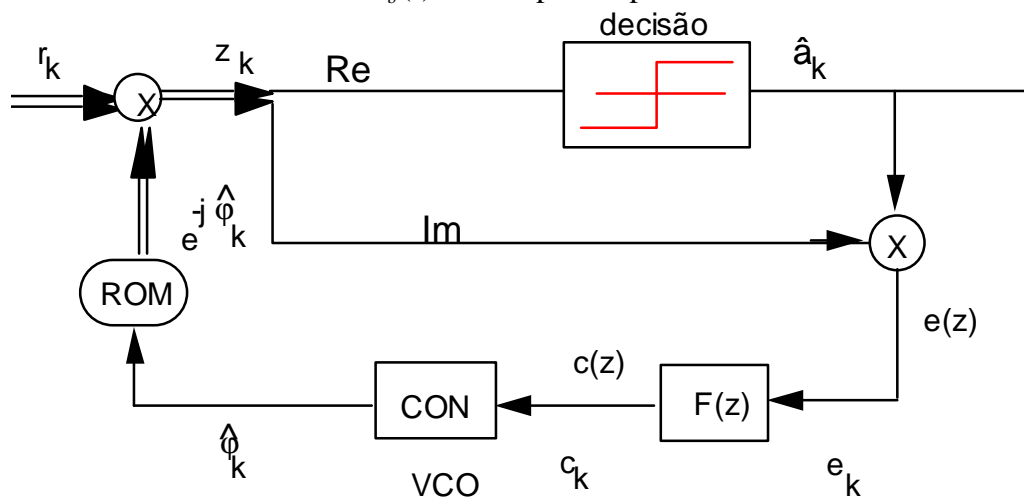
Realiza-se a introdução de uma correção de fase em banda básica.



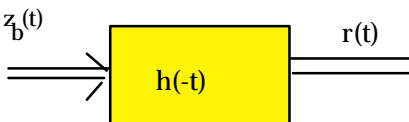
O seguinte circuito pode ser usado na recepção, quando $\mathbf{q}(t)$ varia lentamente.

$$z(t) = \Re \left[\sqrt{2E_b} \sum_k a_k h(t - kT) e^{-jq_k} \right] e^{-j2\pi f_0 t}$$

$z_b(t)$ envelope complexo



O sinal demodulado (em banda básica) é recuperado através de um filtro casado de função de transferência $h(-t)$, resultando em

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} z_b(t) h(t-t) dt$$


A fase deveria ser levada em consideração, mas ela é desconhecida. Sob a hipótese que a fase permanece aproximadamente constante, tem-se:

$$r(t) = e^{-j q_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k a_k \sqrt{2 E_b} h(t-kT) h(t-t) dt.$$

A relação do oscilador controlado digitalmente (OCN) é: $j_{k+1} = j_k + c_k$.

A função de transferência do oscilador controlado digitalmente pode ser determinada usando o fato que: $z f(z) = f(z) + c(z)$.

$$\text{Então } \frac{f(z)}{c(z)} = \frac{1}{z-1} \text{ (integrador digital).}$$

SOLUÇÕES:

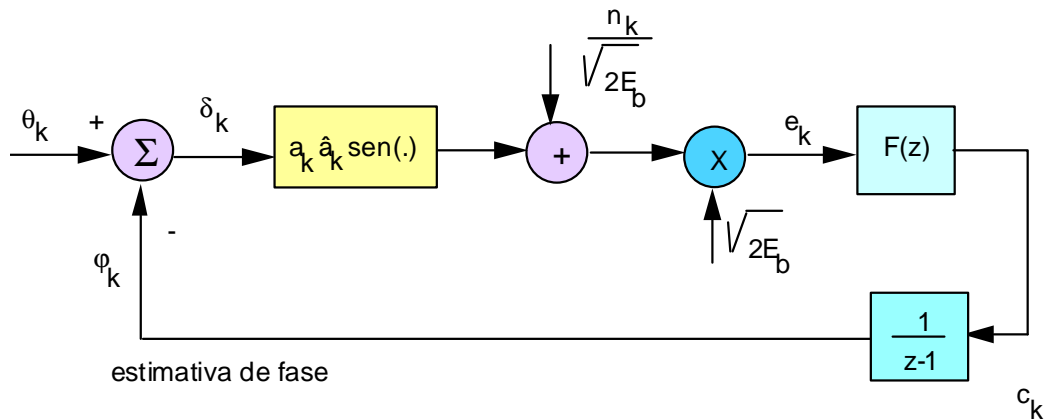
1) Qual a expressão para e_k ?

$$z_k = r_k e^{-j j_k} = \sqrt{2 E_b} e^{j(q_k - j_k)} a_k + w_k e^{-j j_k}.$$

Define-se o erro de fase como sendo a diferença $d_k \stackrel{\Delta}{=} q_k - j_k$, de modo que

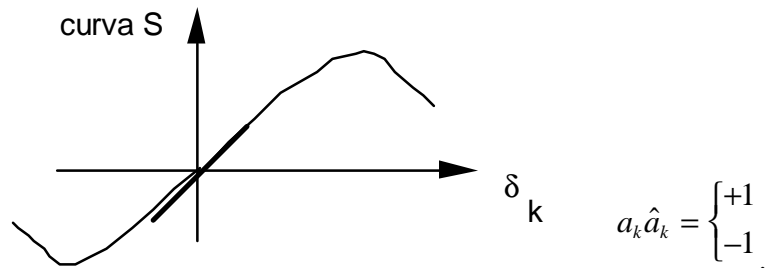
$$e_k = \sqrt{2 E_b} a_k \hat{a}_k \text{sen} d_k + n_k, \text{ com } n_k = \Im w_k e^{-j j_k} \hat{q}_k.$$

A potência e a distribuição do ruído n_k depende diretamente de w_k . Tem-se: $E|w_k|^2 = 2 \mathfrak{N}_0$ e $E|n_k|^2 = \mathfrak{N}_0$, sendo ambas as variáveis gaussianas.



$$e_k = \sqrt{2E_b} a_k \hat{a}_k \text{send}_k + n_k$$

2) É necessário realizar a linearização do Seno para trabalhar com um sistema linear. (não se considera a ambigüidade de fase: a codificação diferencial pode ser usada).



A aproximação linear corresponde a confundir o seno com o arco: $\text{Send}_k \approx \mathbf{d}_k$.

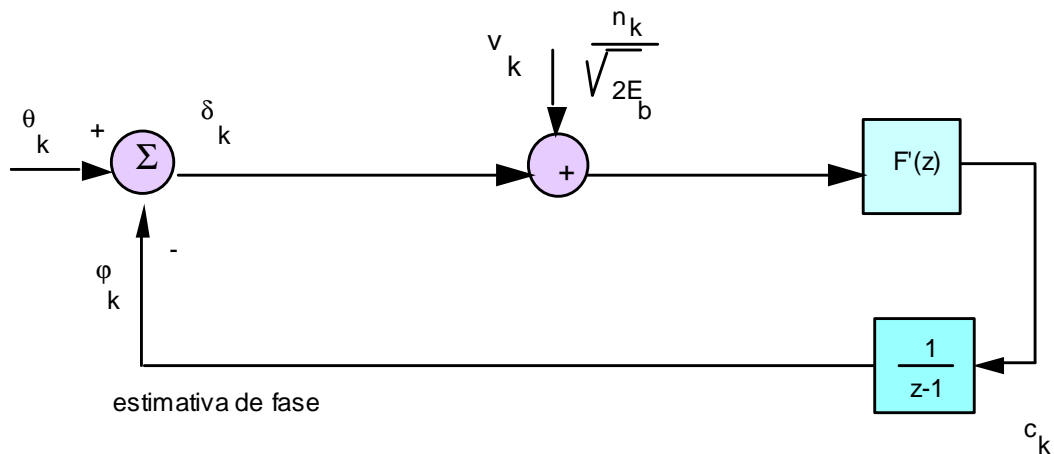
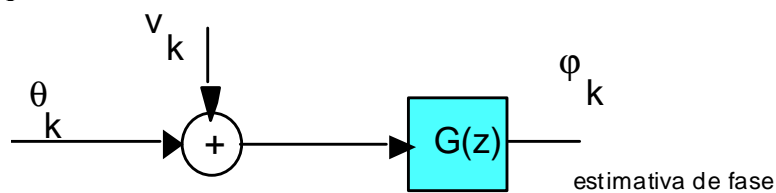


Figura. Um esquema linear.

$G(z)$ representa a função de transferência da malha: O ideal seria $G(z)=I$.

Def. $\Delta(z) = [\mathbf{q}(z) - \mathbf{f}(z)]$



A variância de v_k é dada pelo 2º momento: $Ev_k^2 = \aleph_0 / (2E_b)$.

Cálculo:

$$\mathbf{f}(z) = [\mathbf{q}(z) - \mathbf{f}(z) + V(z)]F'(z) \frac{1}{z-1}.$$

$$\text{Assim, } G(z) = \frac{F'(z)}{(z-1) + F'(z)}.$$

Expressando $F'(z)$ em termos dos zeros e pólos (função racional) onde $\deg D = \deg N$,
 $F'(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$. A ordem do filtro é dada pelo número de pólos: $p = \deg D$.

Para a função de transferência $G(z)$ tem-se:

$$G(z) = \frac{N(z)}{(z-1)D(z) + N(z)}.$$

Logo a ordem de $g(z)$ é $p' = p + 1$.

3) O valor em regime estacionário:

$$\mathbf{d} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}_k \quad (\text{o objetivo é } \mathbf{d} = 0, \text{ i.e., sinais em fase}).$$

Desprezando o ruído nesta análise, de $\Delta(z) = [\mathbf{q}(z) - \mathbf{f}(z)] = \mathbf{q}(z) - G(z)\mathbf{q}(z)$, tem-se:

$$\Delta(z) = \frac{z-1}{(z-1) + F'(z)} \mathbf{q}(z).$$

Aplicando o Teorema do valor final, $\mathbf{d} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})\Delta(z)$.

Sob a hipótese que $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \mathbf{w}_d t$, segue-se que $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_0 + \Omega k$. Aplicando a transformada Z,

$$\mathbf{q}(z) = \frac{\mathbf{q}_0}{1 - z^{-1}} + \Omega \frac{z}{(z-1)^2}. \text{ Qual a região de convergência?}$$

Para uma malha de 1ª ordem, $p' = 1$ e $p = 0$. $F'(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ com $\deg D = 0$ conduz a $F'(z) = \alpha'$.

Avaliando o limite,

$$\mathbf{d} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\mathbf{q}_0(z-1)}{(z-1) + \mathbf{a}'} + \frac{\Omega}{(z-1) + \mathbf{a}'} = \frac{\Omega}{\mathbf{a}'}.$$

Assim, \mathbf{q}_0 é suprimido e Ω é atenuado em função do valor de \mathbf{a}' . Fazer $\mathbf{a}' \rightarrow \infty$ conduz a instabilidade, pois $G(z) = \frac{1}{z-1+\mathbf{a}'}$ apresenta um pólo em $z=1-\mathbf{a}'$. A estabilidade é assegurada no círculo $|1-\mathbf{a}'| < 1$, ou seja, $0 < \mathbf{a}' < 2$. O efeito de w_d (doppler) não é corrigido.

4) Para uma malha de 2ª ordem:

$$\mathbf{d} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\mathbf{q}_0(z-1)}{(z-1) + F(z)} + \frac{\Omega}{(z-1) + F(z)} = \frac{\Omega}{F(1)}.$$

Uma escolha adequada com $F(z)|_{z=1} = \infty$ conduz a $\mathbf{d}=0$.

$F(z) = \mathbf{a}' + \frac{\mathbf{b}'}{z-1}$ com $F(z) = \frac{F(z)}{\sqrt{2E_b}}$ (desprezando os efeitos do ruído), obtém-se

$$F(z) = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{z-1}.$$

Como $C(z)=E(z)F(z)=E(z)\mathbf{a} + \mathbf{b}E(z)/(z-1)$, $\Omega(z) = E(z)\frac{\mathbf{b}}{z-1}$.

Aplicando a transformada Z inversa, $w_{k+1}-w_k=\mathbf{b}e_k$.

Para a malha, obtém-se $\mathbf{j}_{k+1} = \mathbf{j}_k + \mathbf{a}e_k + w_k$.

Em regime estacionário, $e_k \rightarrow 0$ $w_k \rightarrow w$. Assim, $w_{k+1} \rightarrow w_k \rightarrow w$ e $\mathbf{j}_{k+1} \rightarrow \mathbf{j}_k + w$.