Algoritmos para Projeto de Redes de Telecomunicações

Programa de Pós-Graduação em Informática PPGIA - PUCPR

Prof. Marcelo E. Pellenz
http://www.ppgia.pucpr.br/~marcelo
marcelo@ppgia.pucpr.br

Introdução

- Objetivos
  - O objetivo do curso é fornecer os princípios e mecanismos que são utilizados no projeto, modelagem e análise de redes de computadores e de telecomunicações.
  - Aspectos Abordados:
    - Fundamentos Matemáticos e Algoritmos
    - Estudo de Confiabilidade
    - Análise e Modelagem de Tráfego
    - Cálculo de Desempenho
    - Técnicas e Ferramentas de Simulação de Redes
    - Estudos de Caso

Tópicos

- Introdução
- Teoria de Probabilidades
  - Eventos aleatórios e Variáveis aleatórias
  - Função densidade e distribuição de probabilidade
  - Principais distribuições de probabilidade
  - Teste de Hipótese
  - Aplicações em Redes
    - Análise de Tráfego (Dados / VoIP / Video)
    - Modelagem e Síntese de Tráfego
    - Cálculo de Confiabilidade

3

Tópicos

- Teoria de Filas
  - Processos de chegada e atendimento
  - Modelos clássicos de filas
  - Disciplina de gerência de filas
  - Aplicações no projeto e análise de redes
- Teoria de Grafos
- Estudos de Casos
  - Análise e Modelagem de Tráfego
  - Modelagem de Canais em Redes Wireless
  - Desempenho de Redes Wireless
- Simulação de Redes
  - Software NS-2
  - Análise de Resultados de Simulação

4

Bibliografia

- **Material didático** fornecido pelo professor.
- **Edward R. Dougherty**, Probability and statistics for the engineering, computing and physical sciences. Prentice-Hall International, 1990. ISBN 0-13-715913-7
- **Raj Jain,** The art of computer systems performance analysis: techniques for experimental design, measurement, simulation, and modeling. New York: J. Wiley & Sons, c1991. 685 p. ISBN 0-471-50336-3
- **Aaron Kershenbaum**, Telecommunications Network Design Algorithms. McGraw-Hill, Inc, 1993. ISBN 0-07-034228-8
- Estudo de casos utilizando **artigos** da área de redes.

5

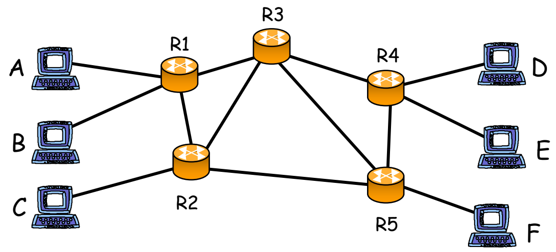
Introdução

- Redes de Computadores e de Telecomunicações
  - Rápida expansão das redes de telecomunicações.
  - Ampla cobertura da rede telefônica.
  - Continuidade de investimentos em telecomunicações.
  - As redes de pacotes estão substituindo as redes comutadas.
  - A interconexão está se tornando crucial para cada aspecto da economia e da cultura.

6

Introdução

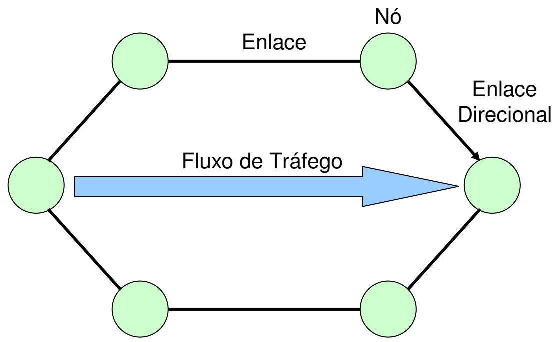
- Componentes de uma Rede



Canais de Comunicação (Enlaces)	Dispositivos (Nós)
Tipos de Canais	Multiplexadores/Concentradores
Custo: Instalação/Manutenção/Locação/Tráfego	Comutadores (Switches)
Capacidade:Total/Útil	Roteadores
Simplex/Half-Duplex/Full-Duplex	
Confiabilidade/Disponibilidade: MTBF/MTTR	

7

Introdução



8

Introdução

- Parâmetros de Desempenho
  - Taxa Útil / Vazão (Throughput)
  - Taxa de Perda de Pacotes
  - Taxa de Erro
  - Atraso (Delay)
  - Variação de Atraso (Jitter)
  - Confiabilidade / Disponibilidade

9

Introdução

- Teoria versus Prática
  - Teoria e prática devem ser parceiras ("em teoria").
  - É possível projetar e construir redes sem muita teoria.
  - Também é possível cometer graves erros de projeto da rede:
    - Fazer muitos gastos.
    - Não obter o desempenho apropriado.
- Problema
  - O problema básico de projeto é construir uma rede que atenda certos requisitos com o mínimo custo.
  - Os critérios de projeto são especificados como vazão, perda, atraso, confiabilidade e requisitos de segurança.

10

Introdução

- Exemplos de Fenômenos de Natureza Probabilística:
  - Instante de chegada dos pacotes
  - Tamanho dos pacotes
  - Número de usuários
  - Condições dos canais de comunicação
  - Falha nos enlaces e nós da rede

11

Introdução

- Portanto não podemos estudar o desempenho de redes sem utilizar ferramentas matemáticas apropriadas:
  - Teoria de Probabilidades
  - Variáveis Aleatórias (VA)
  - Processos Aleatórios (Processos Estocásticos)
  - Teoria de Filas

- Considere a realização de um *experimento aleatório*. O conjunto das possíveis saídas (resultados) do experimento aleatório é denominado *espaço amostral* (S)
- Dentro do espaço amostral podemos estar observando a ocorrência de um evento específico (A)

12

Introdução

- Definições Básicas:
  - A probabilidade é uma medida que associa a cada evento *A* um número real *P(A)* tal que:

$$0 \le P(A) \le 1$$

- Conceito de Freqüência Relativa:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

$$P(A+B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A + n_B}{n}$$

13

Introdução

- Exemplo
  - Medidas de duração de 200 chamadas telefônicas numa *central telefônica*.

Classe	Freqüência	Freqüência Relativa
0 – 1	72	0,36
1 -2	54	0,27
2 -3	34	0,17
3 -4	20	0,10
4 -5	6	0,03
5 -6	8	0,04
6 -7	4	0,02
7 -8	2	0,01

14

Introdução

- Cálculo de Probabilidades usando Métodos de Contagem:
  - 1 - Amostragem com reposição e com ordenação
  - 2 - Amostragem sem reposição e com ordenação
  - 3 - Amostragem sem reposição e sem ordenação
  - 4 - Amostragem com reposição e sem ordenação

15

Introdução

- **1 - Amostragem com reposição e com ordenação:**
  - Escolher k objetos de um conjunto A que tem n objetos distintos.
  - Número de k-uplas ordenadas distintas: $\boxed{n^k}$
- **2 - Amostragem sem reposição e com ordenação:**
  - Escolher k objetos em sucessão, sem reposição, de uma população de n objetos distintos.
  - Número de resultados possíveis na 1a. retirada: $n_1 = n$
  - Número de resultados possíveis na 2a. retirada: $n_2 = n - 1$
  - Número de resultados possíveis na k-ésima retirada: $n_k = n - (k - 1)$
  - Número de k-uplas ordenadas distintas:

$$\boxed{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}$$

16

Introdução

- **Permutação de "*n*" Objetos Distintos:**
  - Considere uma amostragem sem reposição com $k=n$.
  - Isso equivale a retirar objetos de uma urna até que ela esteja vazia.
  - Número de permutações:

$$n\cdot(n-1)\ldots(2)\cdot(1)=n!$$

  - Para n grande, podemos utilizar a fórmula de Stirling:

$$n!\approx\sqrt{2\pi}\cdot n^{(n+1/2)}\cdot e^{-n}$$

17

Introdução

- **3 - Amostragem sem reposição e sem ordenação:**
  - Se pegarmos k objetos de um conjunto de n objetos distintos sem reposição e armazenarmos o resultado sem nos importarmos com a ordem:
    - Existem $k!$ seqüências nas quais os objetos podem ter sido selecionados.
      - Ex: n=4 {1 2 3 4}
        k=3 {123,213,132,312,321,231} 6 possibilidades
    - C_k^n denota o número de combinações de tamanho k de um conjunto de tamanho n. Ex: {123,124,234,134}
    - $C_k^n\cdot k!$ é o número total de amostras ordenadas distintas de k objetos.

18

Introdução

- **3 - Amostragem sem reposição e sem ordenação:**
  - Número total de amostras ordenadas distintas de *k* objetos:

$$\boxed{C_k^n \cdot k! = n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}$$

$$\boxed{C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

  - Note que escolher *k* objetos de um conjunto de *n* é equivalente a escolher *(n-k)* objetos que não foram selecionados.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

19

Introdução

- **4 - Amostragem com reposição e sem ordenação:**
  - Suponha que tomemos *k* objetos de um conjunto de *n* objetos distintos com reposição e armazenamos os resultados sem nos importarmos com a ordem.
  - Exemplo: Selecionar *k=5* objetos de *n=4* objetos distintos:

Objeto 1	Objeto 2	Objeto 3	Objeto 4
XX		X	XX

  - Arranjos: XX /   / X / XX   (5X e 3/) (kX e (n-1)/)

$$C_3^8 = \binom{8}{3} \qquad \boxed{\binom{n-1+k}{n-1} = \binom{n-1+k}{k}}$$

20

Introdução

- **Probabilidade Conjunta**
  - A probabilidade conjunta está associada com a ocorrência dos resultados de múltiplos experimentos.
  - 2 Experimentos $\Longrightarrow$ $0 \le P(A_i, B_j) \le 1$
- **Probabilidades Marginais**

$$\sum_{j=1}^{m} P(A_i, B_j) = P(A_i) \qquad B_j \quad j = 1,2,\ldots,m$$

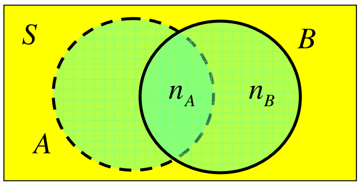
$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i, B_j) = P(B_j) \qquad A_i \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(A_i, B_j) = 1}$$

21

Introdução

- **Teorema de Bayes - Probabilidade Condicionada**
  - Considere um *experimento combinado* no qual um evento conjunto ocorre com probabilidade $P(A, B)$.
  - Suponha que o evento *B* ocorreu e queremos determinar a probabilidade de ocorrência do evento *A*.
  - Esta probabilidade é a probabilidade condicional: $P(A \mid B)$



22

Introdução

- **Teorema de Bayes - Probabilidade Condicionada**
  - *N* = Número total de observações.
  - n_B = Número de resultados favoráveis ao evento *B*.
  - n_A = Número de resultados favoráveis ao evento *A* dentro das n_B tentativas.
  - Observe que n_A é o número de tentativas que são favoráveis ao evento *AB*.

$$P(A,B) = \lim_{N\to\infty} \frac{n_A}{N} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{n_B}{N}\right)\left(\frac{n_A}{n_B}\right) = P(B)\cdot P(A \mid B)$$

$$P(B) = \lim_{N\to\infty} \frac{n_B}{N} \qquad P(A \mid B) = \lim_{N\to\infty} \frac{n_A}{n_B}$$

23

Introdução

- **Teorema de Bayes - Probabilidade Condicionada:**

$$P(A \mid B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \qquad P(B \mid A) = \frac{P(A,B)}{P(A)}$$

$$P(A,B) = P(A \mid B)\cdot P(B) = P(B \mid A)\cdot P(A)$$

- **Eventos Independentes:**

$$P(A \mid B) = P(A)$$

$$P(A,B) = P(A)\cdot P(B)$$

24

Introdução

- Principais Leis da Probabilidade:

$$P(S)=1 \qquad \phi=\overline{S} \qquad P(\phi)=0$$

$$0 \le P(A) \le 1 \qquad P(\overline{A})=1-P(A)$$

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

- Se $A \cap B = 0$ (Eventos Mutuamente Exclusivos):

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

$$P(A \cap B)=0$$

25

Introdução

- Se $A \subseteq B$:

$$P(A) \le P(B)$$

$$P(A \mid B)=\frac{P(A,B)}{P(B)}$$

26

Introdução

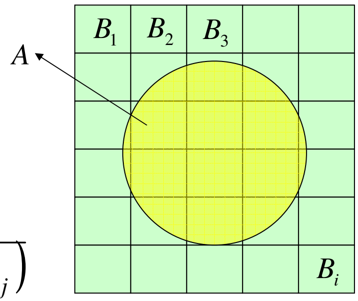
- Lei da Probabilidade Total:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A,B_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\cdot P(B_i)$$

- Fórmula de Bayes:

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(A,B_i)}{P(A)}$$

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(A \mid B_i)\cdot P(B_i)}{\sum_j P(A \mid B_j)\cdot P(B_j)}$$



27

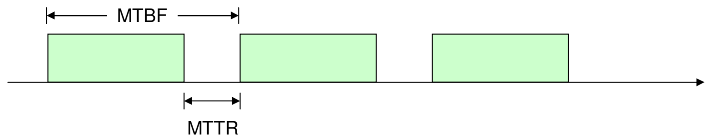
Análise de Confiabilidade da Rede

- Análise de Confiabilidade
  - O objetivo é analisar a *disponibilidade* de qualquer rede.
  - A disponibilidade é definida como a proporção do tempo que o serviço está ativo.
  - Para as redes precisamos considerar a disponibilidade de cada enlace A - B.

28

Análise de Confiabilidade de Redes

- Os conceitos básicos de probabilidades sobre união e interseção de eventos tem aplicação direta na análise de confiabilidade de enlaces em redes de comunicações.
- Aplicação na Análise de Confiabilidade de Redes:
  - Mean Time Between Failures (MTBF)
  - Mean Time To Repair (MTTR)



$$\text{Disponibilidade} = \frac{MTBF - MTTR}{MTBF}$$

29

Análise de Confiabilidade de Redes

- Cálculo de Disponibilidade da Rede (Nós/Enlaces):

$$\text{Availability} = \frac{MTBF - MTTR}{MTBF}$$

$$MTTR = r_i \qquad MTBF = f_i$$

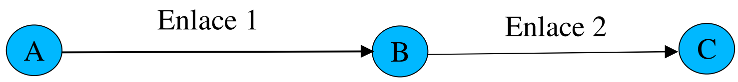
$$p_i = 1 - \frac{r_i}{f_i} = \text{Prob. de Sucesso (Ativo)}$$

$$q_i = (1 - p_i) = \text{Prob. de Falha (Inativo)}$$

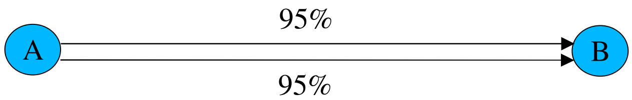
30

Análise de Confiabilidade de Redes

- Análise de Confiabilidade
  - Enlaces Seriais



  - Enlaces Paralelos



31

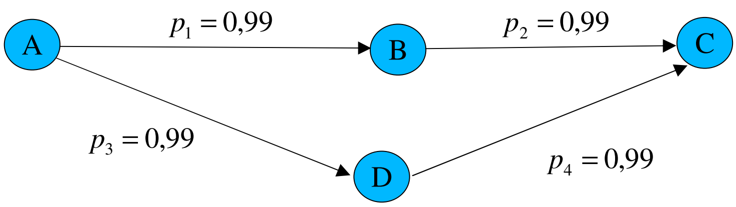
Análise de Confiabilidade de Redes

- Análise de Confiabilidade
  - Disponibilidade Fim-a-Fim dos Enlaces
    - Dada uma rede, precisamos estar aptos a estimar a disponibilidade fim-a-fim de todos os caminhos desta rede.
    - Um método é reduzir os caminhos paralelos para caminhos simples, e caminhos seriais para um único caminho, sempre que possível, até restar apenas um enlace.

32

Análise de Confiabilidade de Redes

- Análise de Confiabilidade
  - Exemplo 1 - Esta rede pode ser analisada pelo método de redução serial-paralelo:



A-B-C F=F1A2+A1F2+F1F2 = 0,0199
Ativo=1-F = 0,9801

A-B-C Ativo=A1A2= 0,9801

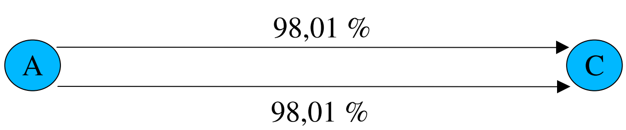
A-D-C F=F3A4+A3F4+F3F4 = 0,0199
Ativo=1-F = 0,9801

A-D-C Ativo=A3A4 = 0,9801

33

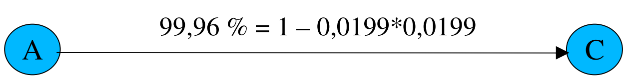
Análise de Confiabilidade de Redes

- Análise de Confiabilidade
  - Rede Equivalente



A-C F=F1F2 = 3,9601E-4
Ativo=1-F = 0,9996

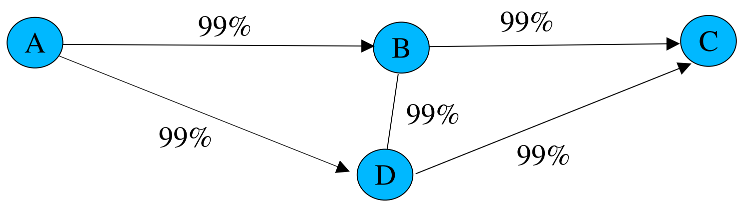
A-C Ativo=A1A2+A1F2+F1A2= 0,9996



34

Análise de Confiabilidade de Redes

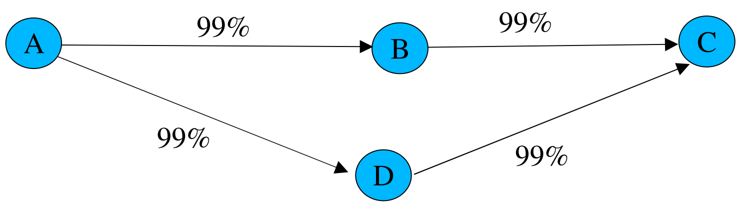
- Análise de Confiabilidade
  - Exemplo 2
    - Esta rede não pode ser analisada pelo método anterior:



35

Análise de Confiabilidade de Redes

- Análise de Confiabilidade
  - Caso 1: o enlace intermediário falha:

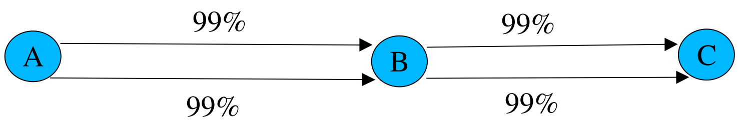


    - Já calculamos a disponibilidade para este caso: 99,96%.

36

Análise de Confiabilidade de Redes

- Análise de Confiabilidade
  - Caso 2: o enlace intermediário está ativo:



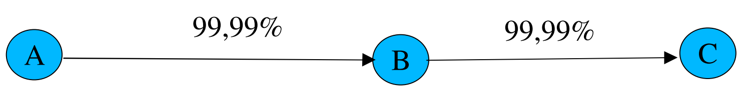
  - Agora podemos combinar os nós intermediários. O lado direito e esquerdo terão disponibilidade:

1-0,01*0,01=99,99%

37

Análise de Confiabilidade de Redes

- Análise de Confiabilidade
  - Caso 2: o enlace intermediário está ativo:



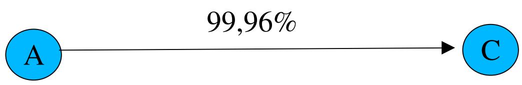
- Agora podemos utilizar a redução serial para encontrar a disponibilidade combinada:

0,9999*0,9999 = 99,98%

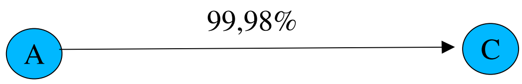
38

Análise de Confiabilidade de Redes

- Combinando os Casos
  - Caso 1: o enlace intermediário cai com probabilidade 0,01, e neste caso a disponibilidade é



  - Caso 2: o enlace intermediário está ativo com probabilidade 0,99, e neste caso a disponibilidade é



- Resposta Combinada: 0,99*0,9998+0,01*0,9996 = 0,99979 (99,979%)

39

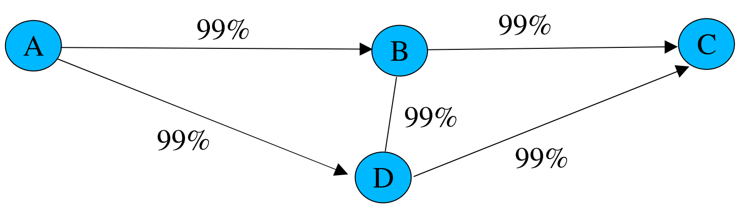
Análise de Confiabilidade de Redes

- Sumário
  - A disponibilidade fim-a-fim pode ser geralmente calculada por meio do *método de redução paralelo-serial* combinado com a técnica de dividir a análise em casos.
  - A seleção do caso apropriado pode ser importante para minimizar o trabalho necessário.

40

Análise de Confiabilidade de Redes

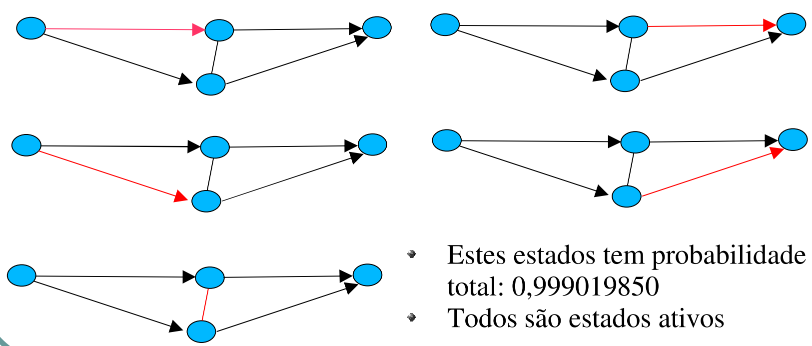
- Método Exaustivo para Análise de Confiabilidade
  - Um método alternativo para análise de confiabilidade é enumerar todos os possíveis estados da rede.
  - Exemplo:



41

Análise de Confiabilidade de Redes

- Estados com um Enlace Inativo
- Probabilidade de todos os enlaces ativos = 0,951 = $(0.99)^5$
- Cada estado com um enlace inativo tem probabilidade: $0{,}01*0{,}99^4=0{,}009606$



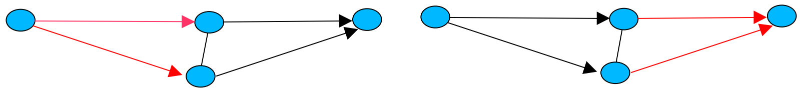
- Estes estados tem probabilidade total: 0,999019850
- Todos são estados ativos

42

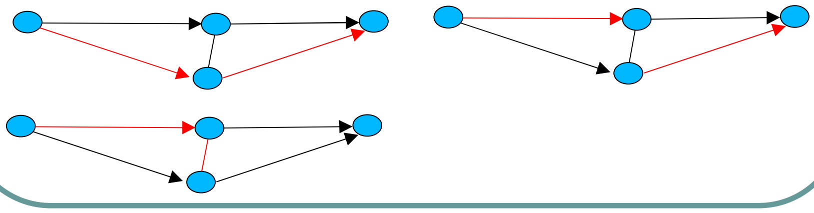
Análise de Confiabilidade de Redes

- Estados com Dois Enlaces Inativos

Apenas dois dos estados com 2 enlaces inativos geram falha na rede:



Nas seguintes situações, por exemplo, a rede permanece ativa:



43

Análise de Confiabilidade de Redes

- Uma Estimativa de Disponibilidade
  - A probabilidade total dos estados com 2 enlaces inativos em que a rede falha é

    $2*0{,}01^2 * 0{,}99^3 = 2*0{,}00009703 = 0{,}000194$

  - *Isso é um limitante inferior da indisponibilidade da rede.*
  - *A probabilidade total dos outros estados com 2 enlaces inativos é dada por*

    $8*0{,}00009703 = 0{,}000776$

  - *A probabilidade total dos estados com 0, 1 e 2 enlaces inativos, em que a rede permanece ativa é*

    $0{,}999019850+0{,}000776 = 0{,}999796090$

  - *A probabilidade total de todos os estados considerados é:*

    0,99999009

44

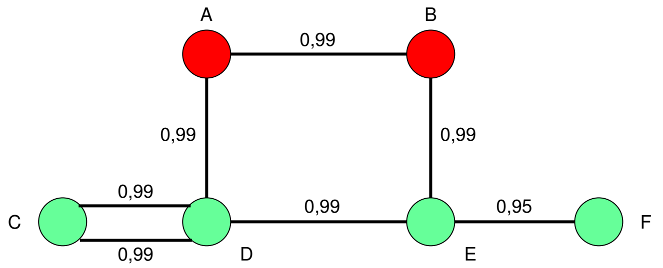
Análise de Confiabilidade de Redes

- Tornando os Cálculos Possíveis
  - Os cálculos descritos não podem ser feitos de forma exaustiva para redes com mais de 15 enlaces.
  - Contudo, não é necessário considerar todos os estados.
  - Para a maioria das redes é suficiente considerar não mais que três estados em que 3 enlaces estão inativos.
  - Na rede considerada no exemplo anterior, 2 enlaces inativos são suficientes.

45

Análise de Confiabilidade de Redes

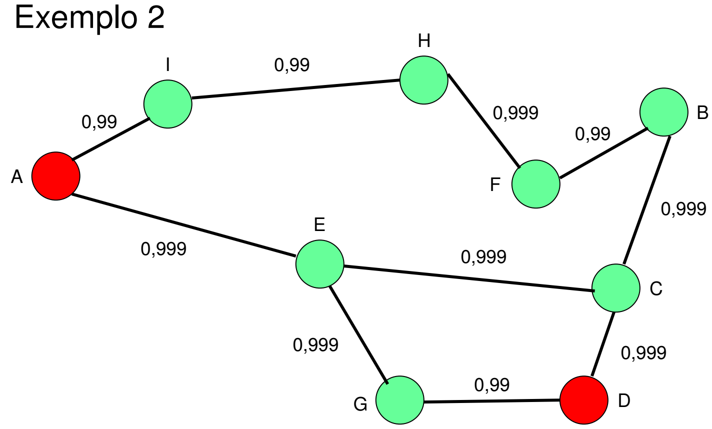
- Exemplo 1
  - Evento A – Falha na transmissão entre A e B
  - Evento B – Falha na transmissão entre A e C



46

Análise de Confiabilidade de Redes

- Exemplo 2

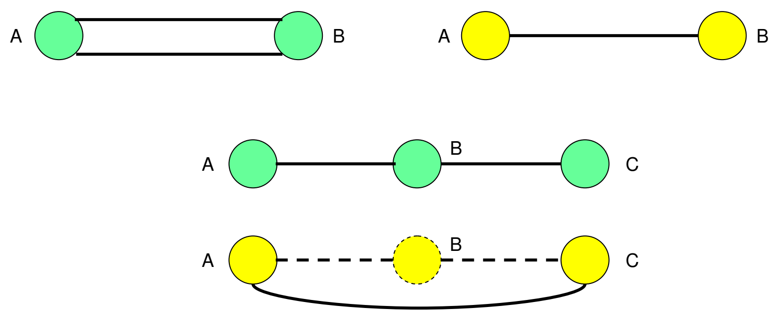


Análise de Confiabilidade de Redes

- Exemplo 2
  - a) Calcular a probabilidade de todos os enlaces estarem operando.
  - b) Calcular a probabilidade de um enlace estar inativo e os outros enlaces estarem operando.
  - c) Quais 2 enlaces tornam a conexão A-D indisponível ?

Análise de Confiabilidade de Redes

- Enlaces Equivalentes



49

Variáveis Aleatórias

- Variáveis Aleatórias (V.A.)
  - Uma variável aleatória, *X*, é uma função que associa um número real com cada elemento do espaço amostral *S*.
  - V. A. Contínuas
    - Intervalo entre pacotes
    - Tempo de atendimento de requisições num servidor
    - Atraso dos pacotes na rede
    - Variação do atraso (jitter)
  - V. A. Discretas
    - Número de pacotes transmitidos durante um intervalo
    - Tamanho dos pacotes recebidos

50

Variáveis Aleatórias

- Caracterização das Variáveis Aleatórias
  - **Função Distribuição de Probabilidade (cdf)**

    (Função Distribuição Cumulativa)
  - A cdf representa a probabilidade da V.A. X assumir um valor no intervalo $(-\infty, x]$.

$$F_X(x) = P(X \le x) \qquad -\infty \le x \le \infty$$

$$\Pr(X \le a) = F_X(a)$$

$$\Pr(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$$

51

Variáveis Aleatórias

- Caracterização das Variáveis Aleatórias
  - **Função Distribuição de Probabilidade (cdf)**
  - Propriedade 1: $0 \le F_X(x) \le 1$
  - Propriedade 2: $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
  - Propriedade 3: $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
  - Propriedade 4 - Função não decrescente: $a < b \Rightarrow F_X(a) < F_X(b)$
  - Propriedade 5:

$$P\{a < X \le b\} = F_X(b) - F_X(a)$$

52

Variáveis Aleatórias

- Caracterização das Variáveis Aleatórias
  - **Função Distribuição de Probabilidade (cdf)**
  - Propriedade 6: A probabilidade que uma V.A. *X* assume em um ponto específico, digamos *b*, é dada pela magnitude do salto da cdf no ponto *b*. Segue que se a cdf é contínua em um ponto *b*, então o evento tem probabilidade zero.
  - Propriedade 7: $\{a \le X \le b\} = \{X = a\} \cup \{a < X \le b\}$
  - Propriedade 8: Se a cdf é contínua nos limites de um intervalo, então os limites tem probabilidade zero:

$$P\{a < X < b\} = P\{a \le X < b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a \le X \le b\}$$

53

Variáveis Aleatórias

- Caracterização das Variáveis Aleatórias:
  - **Função Densidade de Probabilidade (pdf)**

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

  - Propriedade 1: $f_X(x) \ge 0$
  - Propriedade 2: $P\{a \le x \le b\} = \int_a^b f_X(x)\,dx$
  - Propriedade 3: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$
  - Propriedade 4: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

54

Variáveis Aleatórias

- Tipos de Variáveis Aleatórias:
  - Discretas:

$$F_X(x) = \sum_k f_X(x_k) \cdot u(x - x_k) \qquad f_X(x_k) = P\{X = x_k\}$$

  - Contínuas: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\, dy$

  - Mistas: $F_X(x) = p \cdot F_1(x) + (1-p) \cdot F_2(x)$

$$0 < p < 1 \qquad F_1(x) = \text{V.A. Discreta} \qquad F_2(x) = \text{V.A. Contínua}$$

55

Exemplo de Variáveis Aleatórias

- Suponha que foi medido o tráfego em um servidor de páginas. Os seguintes parâmetros são modelados como uma variável aleatória:
  - X=Tamanho do pacote (bytes)
  - Y=Intervalo entre pacotes (s)
  - Z=Tempo de atendimento da requisição (s)

- As letras maiúsculas X, Y e Z designam a variável aleatória.
- As letras minúsculas designam x, y e z designam números reais, que são os valores que as V.A. podem assumir.

56

Exemplo de Variáveis Aleatórias

- Tráfego LAN Ethernet: Tempo (s) x Tamanho dos dados (bytes)

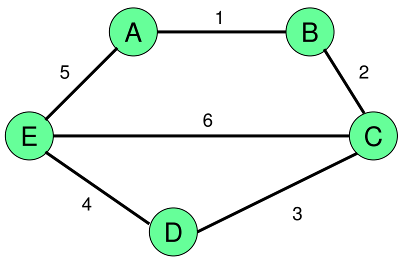
0.001340	1090	0.035844	174	0.072760	162
0.001508	174	0.038468	162	0.076728	174
0.004176	162	0.042524	174	0.079616	162
0.008140	174	0.044044	150	0.083732	174
0.011036	162	0.045324	162	0.086476	162
0.015072	174	0.047296	90	0.090484	174
0.017892	162	0.049248	174	0.093332	162
0.020604	150	0.050360	150	0.097492	174
0.022032	174	0.052184	162	0.101832	162
0.024300	90	0.053820	90	0.105752	174
0.024752	162	0.056356	174	0.110332	162
0.027356	150	0.059044	162	0.114340	174
0.028692	174	0.063028	174	0.118832	162
0.030840	90	0.065900	162	0.122752	174
0.031608	162	0.070032	174	0.125692	162

57

Modelando Redes como Grafos

- Um grafo *G* é definido como um conjunto de nós, *V,* e um conjunto de enlaces, *E*.

$$G = (V, E)$$



$$V = \{v_i \mid i = 1,2,\ldots,N\}$$

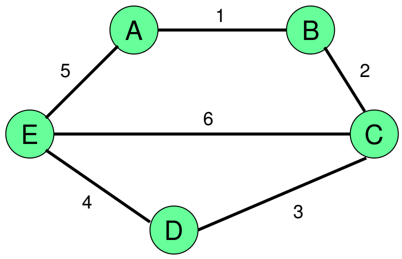
$$E = \{e_j \mid j = 1,2,\ldots,M\}$$

$$e_j = (v_i, v_k) = (i, k)$$

58

Modelando Redes como Grafos

- Nós adjacentes *i* e *j* : Existe um enlace *(i,k)* entre eles.
- O grau de um nó = Número de enlaces incidentes no nó (vizinhos).
- Enlaces direcionais são denominados de arcos, $a_j = [v_i, v_k] = [i, k]$



Caminho Simples A-D: Enlaces 1-2-3

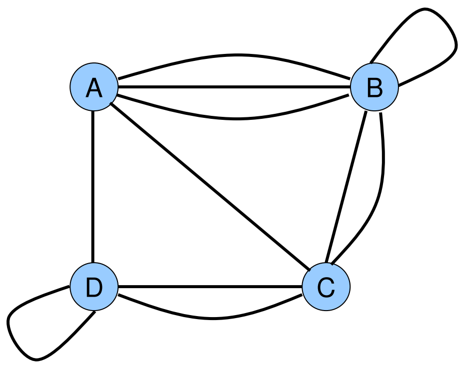
Ciclo Simples: Enlaces 1-2-6-5

Caminho E-A: Enlaces 4-3-6-5

59

Modelando Redes como Grafos

- Grafo com Enlaces Paralelos e Loops



60

Modelando Redes como Grafos

- Definições:
- Grafo Simples: Um grafo *sem* enlaces paralelos e loops.
- Um grafo está *conectado* se existe pelo menos um caminho entre cada par de nós.
- Um conjunto de nós com caminhos entre cada par de nós é denominado *componente conectado (componente)*.
- Um grafo direcionado com um caminho direto entre cada par de nós é denominado *fortemente conectado*.
- Um conjunto de nós com caminhos diretos entre cada par de nós é denominado *componente fortemente conectado*.

61

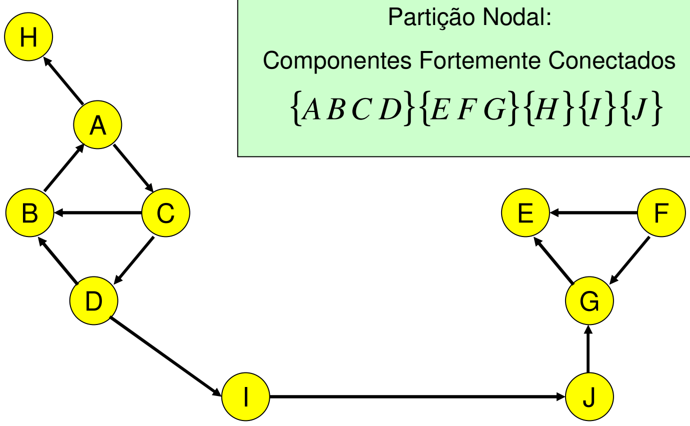
Modelando Redes como Grafos

- Grafo Direcionado

Partição Nodal:

Componentes Fortemente Conectados

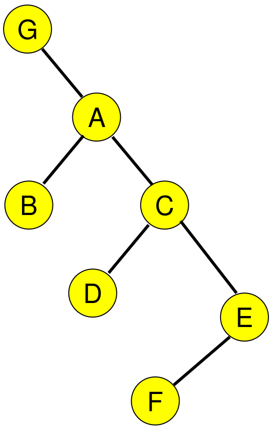
$$\{A\,B\,C\,D\}\{E\,F\,G\}\{H\}\{I\}\{J\}$$



62

Modelando Redes como Grafos

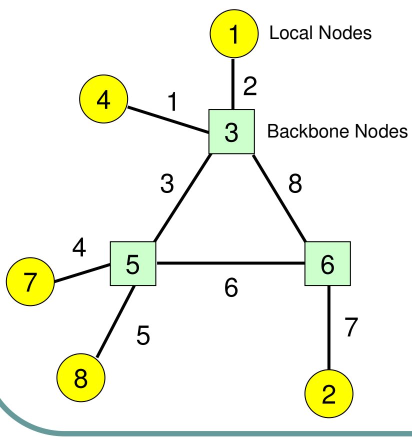
- Spanning Tree: Grafo conectado, sem ciclos.



63

Representação de Redes

- Exemplo

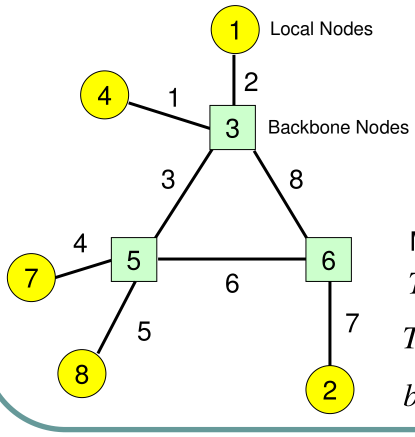


Node #	Backbone node #	Backbone link endpoints	Original link #
1	0	**1 2**	3
2	0	**2 3**	6
3	**1**	**1 3**	8
4	0		
5	**2**		
6	**3**		
7	0		
8	0		

64

Representação de Redes

- Exemplo



Node #	Home
1	1
2	3
3	1
4	1
5	2
6	3
7	2
8	2

Matrizes de Tráfego:

$$T=\{t_{ij} \mid i=1,2,\ldots,8 : j=1,2,\ldots,8\}$$

$$T_B=\{b_{km} \mid k=1,2,3 : m=1,2,3\}$$

$$b_{km}=\sum\{t_{ij} \mid H_i=k : H_j=m\}$$

65

Análise de Confiabilidade de Redes

- A probabilidade de que uma rede representada por um grafo esteja conectada é dada por:

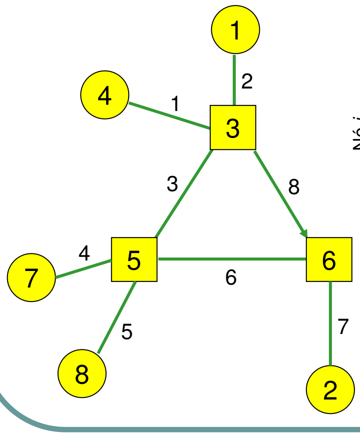
$$P_C(G)=\prod_{i=1}^{N} p_i \cdot \left\{ \bigcup_{T=\text{Tree}} \prod_{j\in T} p_j \right\} \qquad \begin{array}{l} T=\text{Tree} \\ N=\text{Nodes} \end{array}$$

- O primeiro termo representa que todos os *N* nós devem estar operando. Este fator não depende da topologia da rede.
- O segundo termo representa a probabilidade de que pelo menos uma *árvore* do grafo (tree) esteja operacional.
  - Enumerar todas as árvores (esforço computacional exponencial)

66

Análise de Confiabilidade de Redes

- Matrizes de Adjacência e Incidência



Nó j / Nó i

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0	0
3	1	0	0	1	1	1	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	1	1	1
6	0	1	1	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	1	0	0	0

Matriz de Adjacência NxN

Enlace k / Nó (i,j)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	0
3	1	1	1	0	0	0	0	+1
4	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1	1	−1
7	0	0	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	0	0	0

Matriz de Incidência NxM

Grau de um Nó = Somatório de ‘1s’ na linha da matriz de adjacência ou incidência

67