Algoritmos para Projeto de Redes de Telecomunicações

Programa de Pós-Graduação em Informática PPGIA - PUCPR

Prof. Marcelo E. Pellenz
http://www.ppgia.pucpr.br/~marcelo
marcelo@ppgia.pucpr.br

Estatísticas das Variáveis Aleatórias

- Momentos da Variável Aleatória
  - Quando utilizamos variáveis aleatórias na modelagem de experimentos, estamos interessados nas médias estatísticas.
  - Estas estatísticas são denominadas de *momentos* da variável aleatória:
    - Momentos
    - Momentos Centrais
  - Em geral, os dois momentos de particular interesse são:
    - Média (primeiro momento)
    - Variância (segundo momento central)

2

Estatísticas das Variáveis Aleatórias

- Momentos da Variável Aleatória
  - Se *X* é uma variável aleatória discreta, o *n*-ésimo momento é definido como:

$$E\left[X^n\right] = \sum_i x_i^n \cdot P\{X = x_i\}$$

  - Se *X* é uma variável aleatória contínua, o *n*-ésimo momento é definido como:

$$E\left[X^n\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_X(x)\, dx$$

3

Estatísticas das Variáveis Aleatórias

- Momentos da Variável Aleatória
  - Se *X* é uma variável aleatória discreta, o *n*-ésimo *momento central* é definido como:

$$E\left[(X - \overline{X})^n\right] = \sum_i (x_i - \overline{X})^n \cdot P\{X = x_i\}$$

  - Se *X* é uma variável aleatória contínua, o *n*-ésimo *momento central* é definido como:

$$E\left[\left(X - \overline{X}\right)^n\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{X})^n \cdot f_X(x)\, dx$$

4

Estatísticas das Variáveis Aleatórias

- A média é designada por:

$$\mu = \overline{X} = E[X]$$

- A variância é designada por:

$$\mathrm{Var}[X] = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sigma^2$$

$$\mathrm{Var}[X] = E\left[X^2\right] - \mu^2$$

- A raiz quadrada da variância é denominada de desvio padrão, σ

Matlab: exemplo11.m
exemplo12.m

5

Estatísticas de Variáveis Aleatórias

- Momentos da Variável Aleatória
  - Média de uma Variável Aleatória Discreta

$$\mu = \overline{X} = E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_X(x_i)$$

  - Média de uma Variável Aleatória Contínua

$$\mu = \overline{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

6

Estatísticas de Variáveis Aleatórias

- Distribuições Conjuntas (Multidimensionais)
  - Quando analisamos saídas conjuntas de um experimento, temos variáveis aleatórias multidimensionais. As funções de densidade (pdf) e distribuição de probabilidade (cdf) são multidimensionais.

$$X_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

  - Momento Conjunto

$$E\left[X_1^k \, X_2^n\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^k \, x_2^n \, f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 \, dx_2$$

  - Momento Central Conjunto

$$E\left[(X_1 - \mu_1)^k \, (X_2 - \mu_2)^n\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_1)^k \, (x_2 - \mu_2)^n \, f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 \, dx_2$$

7

Estatísticas de Variáveis Aleatórias

- Distribuições Conjuntas (Multidimensionais)
  - Correlação:

$$\rho_{ij} = E\left[X_i \, X_j\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_i \, x_j \, f_{X_i X_j}(x_i, x_j)\, dx_i \, dx_j$$

ρ_{ij} = Matriz de correlação

  - Covariância:

$$\mu_{ij} = E\left[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right]$$

$$\mu_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_i \, x_j \, f_{X_i X_j}(x_i, x_j)\, dx_i \, dx_j - \mu_i \mu_j = E\left[X_i X_j\right] - \mu_i \mu_j$$

μ_{ij} = Matriz de covariância

8

Estatísticas de Variáveis Aleatórias

- Variáveis Aleatórias Descorrelacionadas:

$$E[X_i X_j] = E[X_i] \cdot E[X_j] = \mu_i \mu_j$$

- Variáveis Aleatórias Ortogonais:

$$E[X_i X_j] = 0$$

Matlab: exemplo12a.m

exemplo13.m

9

Estatísticas de Variáveis Aleatórias

- Função Característica
  - Os momentos de uma V.A. podem ser determinados a partir da função característica.

$$\psi(j\omega) \equiv E\left[e^{j\omega X}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} \cdot f_X(x)\, dx$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(j\omega) \cdot e^{-j\omega x}\, d\omega$$

$$\frac{d\psi(j\omega)}{d\omega} = j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{j\omega x} \cdot f_X(x)\, dx$$

10

Estatísticas de Variáveis Aleatórias

- Função Característica
  - Primeiro Momento (Média):

$$E[X] = \mu_X = -j \cdot \left.\frac{d\psi(j\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0}$$

  - *n*-ésimo Momento:

$$E[X^n] = (-j)^n \cdot \left.\frac{d^n\psi(j\omega)}{d\omega^n}\right|_{\omega=0}$$

  - Para variáveis aleatórias independentes, $X_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \psi_Y(j\omega) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{X_i}(j\omega)$$

11

Estatísticas de Variáveis Aleatórias

- **Estimadores**
  - Os estimadores são utilizados para se obter as estatísticas a partir da repetição (observação) do experimento.
  - Média Amostral:

$$\mu = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

  - Variância Amostral:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

12

Estudo de Caso

- Suponha que foi realizada as seguintes medições em um servidor de páginas:
  - Intervalo entre requisições
  - Tamanho dos pacotes enviados
  - Quantidade de pacotes transmitidos por requisição

13

Estudo de Caso

- Intervalo entre Requisições

0.1493	0.0357	0.0273	0.2188	0.2188	0.0788	0.1557	0.1605	0.0337	0.2607
0.2009	0.0366	0.2935	0.0237	0.4973	0.0306	0.0059	0.0403	0.0024	0.0187
0.1448	0.0479	0.1043	0.3216	0.0102	0.0109	0.0089	0.1096	0.0579	0.0102
0.1031	0.0613	0.0358	0.0579	0.4676	0.1101	0.0259	0.0112	0.0532	0.0018
0.1628	0.1193	0.0595	0.0141	0.1058	0.0277	0.1169	0.1221	0.1622	0.0345
0.0020	0.0823	0.0105	0.0622	0.0454	0.1983	0.0673	0.1023	0.1090	0.1952
0.0066	0.0281	0.0308	0.0286	0.1379	0.0624	0.1028	0.1088	0.1308	0.1700
0.0956	0.1246	0.0285	0.0166	0.1226	0.0325	0.0434	0.0699	0.2957	0.0754
0.0719	0.0473	0.1027	0.0327	0.0074	0.0603	0.0092	0.1291	0.0518	0.3773
0.0138	0.0095	0.0584	0.1092	0.0396	0.0716	0.0271	0.1024	0.1219	0.1712

14

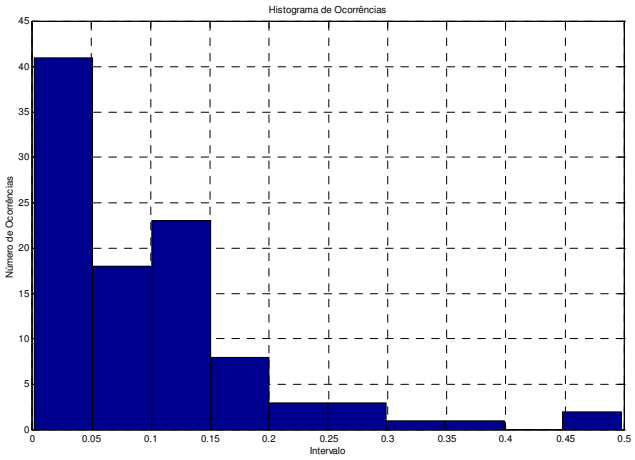
Estudo de Caso

- Intervalo entre Requisições:
  - Valor médio estimado: 0,0937 Desvio padrão: 0,0943
  - Histograma:

Intervalo (s)	Freqüência Observada (f_o)
0 – 0,05	41
0,05 - 0,1	18
0,1 – 0,15	23
0,15 – 0,20	8
0,20 – 0,25	3
0,25 – 0,30	3
0,30 – 0,35	1
0,35 – 0,40	1
0,40 – 0,45	0
0,45 – 0,50	2

15

Estudo de Caso



analise_trafego.m

16

Teste de Aderência

- O histograma é similar a uma distribuição exponencial negativa.

$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \qquad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Para verificar a qualidade da aproximação oferecida pela distribuição exponencial negativa aplicamos o teste Chi-quadrado.
- Calcula-se:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_{oi} - f_{ei})^2}{f_{ei}} = D$$

- f_e = freqüência esperada pela distribuição teórica
- f_o = freqüência observada (histograma)

17

Teste de Aderência

Intervalo	Freqüência Observada (f_{oi})	Freqüência Esperada (f_{ei})	
0 – 0,05	41	41,3561	0,0031
0,05 - 0,1	18	24,2528	1,6121
0,1 – 0,15	23	14,2228	5,4166
0,15 – 0,20	8	8,3408	0,0139
0,20 – 0,25	3	4,8914	0,1597
0,25 – 0,30	3	2,8685	
0,30 – 0,35	1	1,6822	
0,35 – 0,40	1	0,9865	
0,40 – 0,45	0	0,5785	
0,45 – 0,50	2	0,3393	
			D = 7,2054

18

Teste de Aderência

- O teste de aderência de Chi-quadrado compara o valor de *D* com o valor tabelado da distribuição Chi-quadrado:

$$\chi^2_{\alpha,k-r-1}$$

- onde α é o nível de significância, *k* é o número de classes, *k-1* é o número de graus de liberdade e *r* é o número de estimadores da distribuição em estudo.
- Para que a hipótese seja aceita,

$$D < \chi^2_{\alpha,k-r-1}$$

19

Teste de Aderência

- Para um nível de significância de $\alpha = 0{,}05$ $\quad \chi_{\alpha,k-r-1} = \chi_{0.05,3}$

	alfa										
Graus de Liberdade	0.995	0,990	0,950	0,900	0,800	0,500	0,200	0,100	0,050	0,010	0,005
1	0,000	0,000	0,004	0,016	0,064	0,455	1,642	2,706	3,841	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,103	0,211	0,446	1,386	3,219	4,605	5,991	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,352	0,584	1,005	2,366	4,642	6,251	7,815	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,711	1,064	1,649	3,357	5,989	7,779	9,488	13,277	14,860
5	0,412	0,554	1,145	1,610	2,343	4,351	7,289	9,236	11,070	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,635	2,204	3,070	5,348	8,558	10,645	12,592	16,812	18,548
7	0,989	1,239	2,167	2,833	3,822	6,346	9,803	12,017	14,067	18,475	20,278
8	1,344	1,647	2,733	3,490	4,594	7,344	11,030	13,362	15,507	20,020	21,955
9	1,735	2,088	3,325	4,168	5,380	8,343	12,242	14,684	16,919	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,940	4,865	6,179	9,342	13,442	15,987	18,307	23,209	25,188

20

Teste de Aderência

- Considere os seguintes valores médios estimados para o exemplo anterior:
  - Intervalo entre requisições = 0,0937s
  - Tamanho dos Pacotes = 503 bytes
  - Quantidade de pacotes transmitidos por requisição = 12
- Determine a capacidade mínima para o enlace deste servidor ?
- Quais fatores afetam este dimensionamento ?

21

Projeto 2

- Realize o *teste de aderência* para os dados abaixo, que representam o tamanho dos pacotes (bytes) transmitidos pelo servidor:

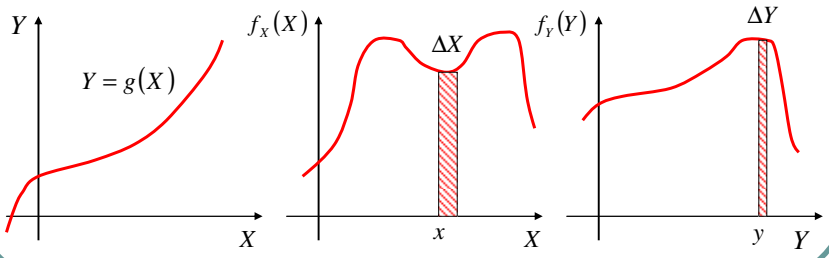
512	448	498	587	435	583	489	373	342	470
630	582	458	517	565	531	673	541	502	639
449	346	473	453	507	456	431	429	550	410
469	531	505	537	357	486	612	529	370	451
591	438	612	423	488	558	601	444	628	525
461	471	441	392	690	384	566	630	365	654
571	617	584	530	448	533	569	724	370	433
408	551	452	468	387	447	324	543	479	489
435	555	542	249	452	485	586	422	528	502
506	487	474	352	352	577	554	341	273	669

22

Funções de Variáveis Aleatórias

- Quando executamos alguma operação com uma variável aleatória geramos uma outra variável aleatória, com nova função densidade e distribuição de probabilidade.

$$X \rightarrow f_X(x) \qquad Y = g(X) \rightarrow f_Y(y)$$



23

Funções de Variáveis Aleatórias

$$\lim_{\Delta x \to 0} f_X(x)\Delta x = f_Y(y)\Delta y \qquad \lim_{\Delta x \to 0} f_X(x)|\Delta x| = f_Y(y)|\Delta y|$$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left|\frac{dY}{dX}\right|} = \frac{f_X(x)}{g'(x)} \qquad f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{g'(x)}\right|_{x=g^{-1}(y)}$$

- Teorema – Sejam duas V.A. *X* e *Y*, com $Y = g(X)$ biunívoca. Nestas condições a função densidade de probabilidade de *Y* é dada por:

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{g'(x)}\right|_{x=g^{-1}(y)}$$

24

Funções de Variáveis Aleatórias

- Exemplo – Cálculo Analítico+Simulação (Matlab)
  - Seja *X* uma V.A. contínua com distribuição uniforme entre (0,1).
  - Considerando a transformação $Y = 2X - 3$
  - Determine a função densidade de probabilidade da V.A. *Y*, $f_Y(y)$

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{g'(x)}\right|_{x=g^{-1}(y)} \qquad f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{2}\right|_{x=\frac{y+3}{2}}$$

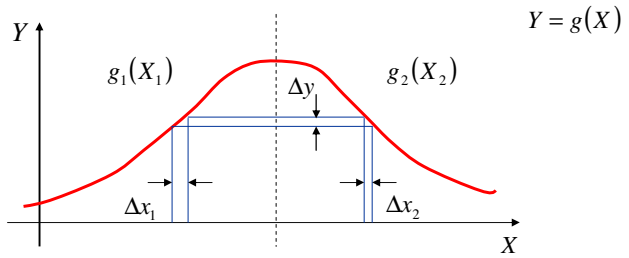
$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & fora \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 0{,}5, & -3 \le y \le -1 \\ 0, & fora \end{cases}$$

Exemplo Matlab

25

Funções de Variáveis Aleatórias

- Função de uma Variável Aleatória com Duas Raízes



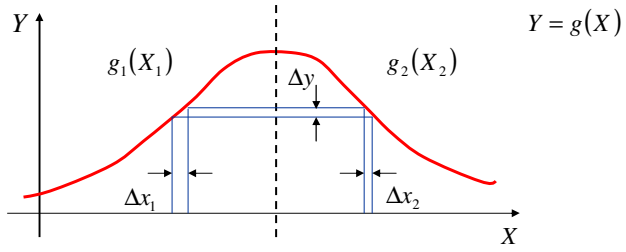
- Para um dado valor de *Y* existem dois valores de *X*:

$$Y = g_1(X_1) \qquad X_1 = g_1^{-1}(Y)$$
$$Y = g_2(X_2) \qquad X_2 = g_2^{-1}(Y)$$

26

Funções de Variáveis Aleatórias

- Função de uma Variável Aleatória com Duas Raízes



$$(y, y+\Delta y) \begin{cases} (x_1, x_1+\Delta x_1) \\ \text{ou} \\ (x_2, x_2+\Delta x_2) \end{cases}$$

Eventos mutuamente exclusivos pois X pode assumir valores x_1 ou x_2, mas não ambos

27

Funções de Variáveis Aleatórias

- Função de uma Variável Aleatória com Duas Raízes

$$f_Y(y)|\Delta y| = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}} \left(f_X(x_1)|\Delta x_1| + f_X(x_2)|\Delta x_2| \right)$$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g_1'(x_1)|_{x_1 = g_1^{-1}(y)}} + \frac{f_X(x_2)}{|g_2'(x_2)|_{x_2 = g_2^{-1}(y)}}$$

28

Gerando Variáveis Aleatórias

- Podemos gerar variáveis aleatórias com distribuições arbitrárias a partir de variáveis com distribuição uniforme.

$$Y = g(X)$$

$$F_Y(y) = \Pr\{Y \le y\} = \Pr\{g(X) \le y\} = \Pr\{X \le g^{-1}(y)\}$$

$$F_Y(y) = F_X\left(g^{-1}(y)\right)$$

- Se $g(\cdot) = F_X(\cdot)$ temos que:

$$F_Y(y) = F_X\left(F_X^{-1}(y)\right) = y \qquad f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = 1$$

29

Gerando Variáveis Aleatórias

- Portanto *Y* obedece a uma distribuição uniforme no intervalo (0,1).
- Para simular uma V.A. *Y* com cdf $F_Y(y)$ geramos uma V.A. *X* com distribuição uniforme e aplicamos a transformação:

$$Y = F_Y^{-1}(X)$$

- Este método sempre pode ser aplicado se pudermos achar uma fórmula explícita para $F_Y^{-1}(y)$.

30

Gerando Variáveis Aleatórias

- Exemplo – Cálculo Analítico+Simulação (Matlab)
  - Implementar um algoritmo para gerar uma V.A. com distribuição exponencial negativa:

$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$$

  - Quando o processo de chegada num servidor é dado por Poisson com taxa λ , o intervalo entre chegadas tem distribuição exponencial negativa.

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad Y = 1 - e^{-\lambda X}$$

$$X = F^{-1}(Y) = -\frac{\ln(1-Y)}{\lambda}$$

  - Y = V.A. Uniforme

Matlab: exemplo21.m

31

Gerando Variáveis Aleatórias Uniformes

- Gerador de Congruência Linear

$$x[n] = (a \cdot x[n-1] + c) \mod m \qquad c \neq 0$$

$$x[n+1] = 65539 \cdot x[n] \mod 2^{31}$$

$$x[n+1] = 16807 \cdot x[n] \mod (2^{31} - 1)$$

$$x[n+1] = 40692 \cdot x[n] \mod 2147483399$$

32

Geradores de Números Aleatórios

- Equação de Recorrência (Pseudo Random Numbers):

$$X_{n+1} = P_1 \cdot X_n + P_2 \quad \text{mod } N \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$X_0 = \text{Especificado (seed)}$$

- Exemplo:

$$X_0 = 79 \quad N = 100 \quad P_1 = 263 \quad P_2 = 71$$

$$X_1 = 263 \cdot 79 + 71 \,(\text{mod } 100) = 20848 \,(\text{mod } 100) = 48$$

$$X_2 = 263 \cdot 48 + 71 \,(\text{mod } 100) = 12695 \,(\text{mod } 100) = 95$$

$$X_3 = 263 \cdot 95 + 71 \,(\text{mod } 100) = 25056 \,(\text{mod } 100) = 56$$

79 48 95 56 99 8 75 96 19 68 55 36 39 28 35 76 59 88 15 16 79 48 .....

33

Geradores de Números Aleatórios

- Como gerar outras distribuições de probabilidade ?
  - Transformação de Variável Aleatória
- Como testar a eficiência do gerador de número aleatórios ?
  - Pontos uniformemente distribuídos no intervalo

$$(X_i, X_{i+k}) \quad k = 1,2,3,\ldots = \text{lag}$$

- Exemplos de Geradores:

$$X_0 = 79 \quad N = 100 \quad P_1 = 263 \quad P_2 = 71$$

$$X_0 = 79 \quad N = 2^{31} - 1 = 2147483647 \quad P_1 = 16807 \quad P_2 = 0$$

Exemplo Matlab: rgenerator.m

34

Gerando Variáveis Aleatórias Gaussianas

- Método 1
  - Utilizar uma aproximação racional para a função distribuição cumulativa inversa, $F_Y^{-1}(y)$.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dy$$

$$F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{z} e^{-y^2/2}\,dy \qquad Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

35

Gerando Variáveis Aleatórias Gaussianas

- Método 1
  - Utilizar uma aproximação racional para a função distribuição cumulativa inversa, $F_Y^{-1}(y)$.

$$F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{z} e^{-y^2/2}\,dy$$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{x}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt$$

$$F_Z(z) = 1 - Q(z)$$

$$F_Z(z) = p = 1 - Q(x_p)$$

36

Gerando Variáveis Aleatórias Gaussianas

- Método 1
  - Utilizar uma aproximação racional para a função distribuição cumulativa inversa, $F_Y^{-1}(y)$.

$$x_p = t - \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3} \qquad t = \sqrt{\ln \frac{1}{p^2}}$$

$$\begin{aligned} c_0 &= 2{,}515517 & d_1 &= 1{,}432788 \\ c_1 &= 0{,}802853 & d_2 &= 0{,}189269 \\ c_2 &= 0{,}010328 & d_3 &= 0{,}001308 \end{aligned}$$

  - A aproximação tem um erro máximo de $4{,}5 \cdot 10^{-4}$ em 'p'

Matlab: exemplo22.m

37

Soma de Variáveis Aleatórias

- Considere a soma de *n* variáveis aleatórias:

$$Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

$$E[Y_n] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n]$$

  - A relação vale para variáveis independentes ou não.

- Teorema 1

$$\mathrm{Var}[Y_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{Cov}[X_i, X_j]$$

Matlab: exemplo23.m

38

Soma de Variáveis Aleatórias

- Teorema 2
  - Quando as V.A. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são mutuamente independentes:

$$\mathrm{Cov}[X_i, X_j] = 0$$

$$\mathrm{Var}[Y_n] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n]$$

- Teorema 3
  - A soma de *n* variáveis aleatórias Gaussianas independentes tem distribuição Gaussiana com média e variância:

$$E[Y_n] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n]$$

$$\mathrm{Var}[Y_n] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n]$$

39

Soma de Variáveis Aleatórias

- Muitos problemas práticos podem ser analisados pela soma de V.A. identicamente distribuídas, mas cujo número de termos na soma também uma V.A.

$$N \Rightarrow \text{V.A.}$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

- Teorema 4
  - A soma aleatória das V.A. independentes e identicamente distribuídas tem média e variância dadas por:

$$E[Y] = E[N] \cdot E[X]$$

$$\mathrm{Var}[Y] = E[N] \cdot \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[N] \cdot E[X]^2$$

40

Teorema do Limite Central

- **Teorema do Limite Central**
  - Dada uma seqüência $X_1, X_2, \ldots$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ_X e variância σ_X^2 , a função distribuição cumulativa (cdf) de

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_X}{\sqrt{n \cdot \sigma_X^2}}$$

satisfaz $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \Phi(z)$

onde $\Phi(z)$ é a cdf de uma variável aleatória Gaussiana *N*(0,1).

41

Gerando Variáveis Aleatórias Gaussianas

- Método 2
  - Seja X_i uma seqüência de variáveis aleatórias identicamente distribuídas com distribuição uniforme U(0,1).

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \le x \le b$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \quad \sigma^2 = \frac{1}{12}$$

42

Gerando Variáveis Aleatórias Gaussianas

- Método 2 - Teorema do Limite Central

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_X}{\sqrt{n \cdot \sigma_X^2}} \qquad \mu_X = \frac{1}{2} \qquad \sigma_X^2 = \frac{1}{12}$$

$$Z_{12} = \sum_{i=1}^{12} X_i - 12 \cdot 0{,}5 = \sum_{i=1}^{12} X_i - 6$$

$$Z_{12} \Rightarrow N(\mu, \sigma_2) = N(0,1)$$

Matlab: exemplo24.m

43