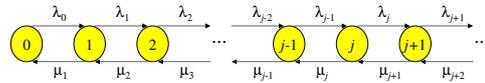


Algoritmos para Projeto de Redes de Telecomunicações: Teoria de Filas

Programa de Pós-Graduação em Informática PPGIA - PUCPR

Prof. Marcelo E. Pellenz
<http://www.ppgia.pucpr.br/~marcelo>
marcelo@ppgia.pucpr.br

Diagrama de Transição de Estados



- Quando o sistema está no estado ' n ', significa que ele possui ' n ' tarefas
- Taxa de novas chegadas: λ_n
- Taxa de serviço/atendimento: μ_n
- Assume-se que tanto os intervalos entre as chegadas quanto os tempos de serviço são exponencialmente distribuídos.

4

Sistema com Fila Única

- O modelo de filas mais simples contém apenas uma fila.
- Pode ser usado para analisar recursos individuais em sistemas de computação e redes de comunicações.
- Muitos tipos de filas podem ser modeladas como processos aleatórios de nascimento e morte.

2

Diagrama de Transição de Estados

- Existem duas possibilidades:
 - 1 - A taxa de chegada é maior que a taxa de saída (atendimento). Neste caso o número de mensagens no sistema cresce sem limite.
 - 2 - A taxa de chegada é menor que a taxa de saída (atendimento). O número de mensagens no sistema varia (aumentando/diminuindo) e eventualmente retornando ao estado zero. (pelo menos por curtos períodos de tempo)
- Portanto, em um intervalo longo de tempo, o número de transições do estado n para $n+1$ deve ser igual ao número de transições do estado $n+1$ para o estado n . (Sistema em Equilíbrio)
- A probabilidade do sistema estar num dado estado é a fração do tempo total gasto naquele estado.

5

Processos de Nascimento e Morte

- Um processo de nascimento e morte é útil para modelar sistemas nos quais as tarefas (clientes) chegam **um de cada vez** (e não em lotes).
- O estado do sistema pode ser representado pelo número de tarefas, n , no sistema.
- A chegada de uma nova tarefa (nascimento) leva o sistema para o estado $n+1$.
- A finalização de uma tarefa (morte) leva o sistema para o estado $n-1$.

3

Probabilidade de Estados

- **Teorema**
 - A probabilidade em regime permanente, p_n , de que um processo de nascimento e morte esteja no estado n é dada por:

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} p_0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

- A probabilidade p_0 é a probabilidade de que o sistema se encontre no estado zero (vazio).

6

Prova do Teorema

- Suponha que o sistema se encontre no estado j no instante t .
- Seja Δt o próximo intervalo de tempo, com duração muito curta, de modo que não haja dois eventos no mesmo intervalo.
- No próximo intervalo de tempo, o sistema pode transitar para o estado $j-1$ ou $j+1$ com as seguintes probabilidades:

$$P\{n(t + \Delta t) = j + 1 | n(t) = j\} = \text{probabilidade de uma chegada em } \Delta t = \lambda_j \Delta t$$

$$P\{n(t + \Delta t) = j - 1 | n(t) = j\} = \text{probabilidade de uma partida em } \Delta t = \mu_j \Delta t$$

$$P\{n(t + \Delta t) = j | n(t) = j\} = \text{probabilidade de permanecer em } j = 1 - \lambda_j \Delta t - \mu_j \Delta t$$

7

Prova do Teorema

- Substituindo estes valores na j -ésima equação, obtemos:

$$0 = \lambda_{j-1} p_{j-1} - (\mu_j + \lambda_j) p_j + \mu_{j+1} p_{j+1}$$

$$p_{j+1} = \left(\frac{\mu_j + \lambda_j}{\mu_{j+1}} \right) p_j - \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_{j+1}} p_{j-1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$$

- A solução para este conjunto de equações é a seguinte:

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} p_0 = p_0 \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

10

Prova do Teorema

- Denominando de $p_j(t)$ a probabilidade de estar no estado j no instante t , podemos escrever o seguinte conjunto de equações lineares:

$$p_0(t + \Delta t) = (1 - \lambda_0 \Delta t) p_0(t) + \mu_1 \Delta t p_1(t)$$

$$p_1(t + \Delta t) = \lambda_0 \Delta t p_0(t) + (1 - \mu_1 \Delta t - \lambda_1 \Delta t) p_1(t) + \mu_2 \Delta t p_2(t)$$

$$p_2(t + \Delta t) = \lambda_1 \Delta t p_1(t) + (1 - \mu_2 \Delta t - \lambda_2 \Delta t) p_2(t) + \mu_3 \Delta t p_3(t)$$

⋮

$$p_j(t + \Delta t) = \lambda_{j-1} \Delta t p_{j-1}(t) + (1 - \mu_j \Delta t - \lambda_j \Delta t) p_j(t) + \mu_{j+1} \Delta t p_{j+1}(t)$$

8

Probabilidade do Estado Zero

- O teorema permite determinar a probabilidade de equilíbrio p_n em termos de p_0 . Usando a condição adicional de que a soma de todas as probabilidades deve ser 1, obtemos:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{n-1} [\lambda_j / \mu_{j+1}]}$$

- A partir dessas probabilidades de estado, podemos calcular muitas outras medidas de desempenho, para diferentes tipos de sistemas de filas.

- Exemplo: M/M/1, M/M/m, M/M/m/K

11

Prova do Teorema

- A j -ésima equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_j(t + \Delta t) - p_j(t)}{\Delta t} = \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\mu_j + \lambda_j) p_j(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t)$$

$$\frac{d p_j(t)}{d t} = \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\mu_j + \lambda_j) p_j(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t)$$

- Em regime permanente, $p_j(t)$ aproxima-se de um valor constante p_j , isto é:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_j(t) = p_j \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d p_j(t)}{d t} = 0$$

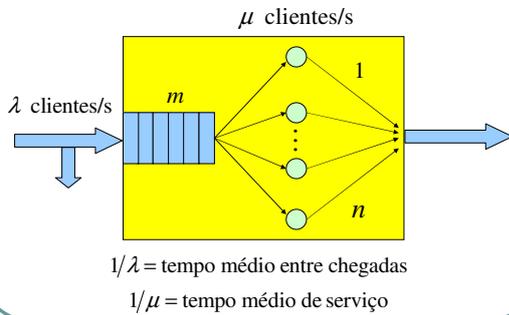
9

Modelos de Tráfego

- Modelos Clássicos para Rede Telefônica
 - Modelos de Perda
- Modelos Clássicos para Rede de Dados
 - Modelos de Filas
 - Tráfego consiste de pacotes transmitidos no enlace

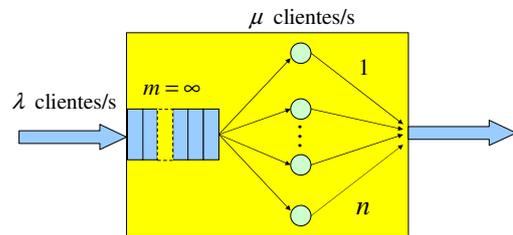
12

Modelo Simplificado de Tráfego



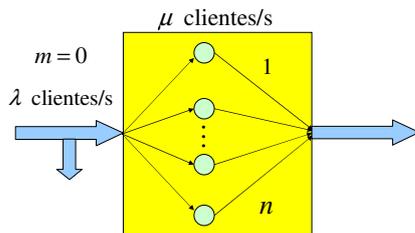
13

Modelo de Sistema com Atrasos Puros



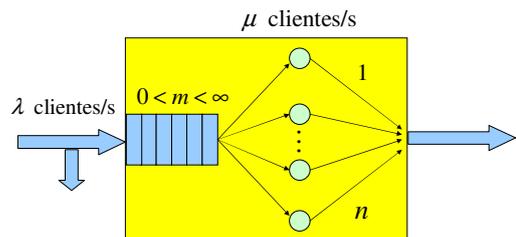
16

Modelo de Sistema com Perdas Puras



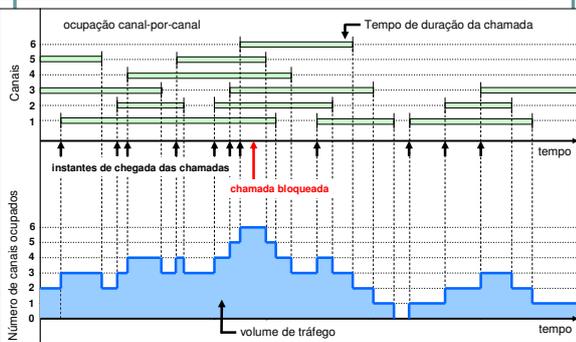
14

Modelo de Sistema Misto



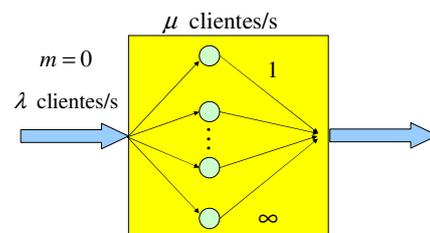
17

Processo de Tráfego Telefônico



Sistema Sem Perdas

- Nenhum cliente é perdido, nem precisa esperar para ser atendido



18

Fórmula de Little

- Considere um sistema onde:
 - Novos clientes chegam na taxa λ clientes/s
- Condição de Estabilidade:
 - Os clientes não se acumulam no sistema
 - Ocasionalmente o sistema está vazio
- Consequência:
 - Os clientes deixam o sistema na taxa λ

\bar{N} = número médio de cliente no sistema
 \bar{T} = tempo médio do cliente no sistema

$$\bar{N} = \lambda \cdot \bar{T}$$

19

Modelo de Fila M/M/1

- Portanto:

$$p_n = \rho^n p_0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$
- Como a soma das probabilidades deve ser igual 1, obtemos:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^\infty} = 1 - \rho$$

- Esta soma infinita é a soma de uma série geométrica, que só converge se $\lambda/\mu < 1$ (sistema em equilíbrio).
- Substituindo na expressão para p_n obtemos:

$$p_n = (1 - \rho)\rho^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

- A probabilidade p_n tem distribuição geométrica.

22

Modelo de Fila M/M/1

Propriedades da Fila M/M/1

- **Utilização do Servidor:** probabilidade de haver um ou mais clientes no sistema.

$$U = 1 - p_0 = \rho$$

- **Número Médio de Clientes no Sistema:**

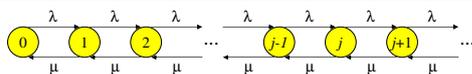
$$E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n (1 - \rho) \rho^n = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad N = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

- **Variância do Número de Clientes no Sistema:**

$$\text{Var}[n] = E[n^2] - (E[n])^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (1 - \rho) \rho^n \right) - (E[n])^2 = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$$

23

Modelo de Fila M/M/1



- Modelada como um processo de nascimento e morte, onde:

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

$$\mu_n = \mu, \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

- Utilizando o teorema obtemos:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

$\rho =$ intensidade de tráfego / utilização

21

Progressão Geométrica

$$a + (a + d) \cdot r + (a + 2d) \cdot r^2 + \dots = \frac{a}{1 - r} + \frac{rd}{(1 - r)^2}$$

$$a = 0 \quad d = 1 \quad r = \rho$$

$$r + 2 \cdot r^2 + \dots = \frac{r}{(1 - r)^2}$$

$$E[n] = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n = (1 - \rho) \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$$

24

Propriedades da Fila M/M/1

- Probabilidade de se ter n ou mais clientes no sistema:

$$P(\geq n \text{ jobs no sistema}) = \sum_{j=n}^{\infty} p_j = \sum_{j=n}^{\infty} (1-\rho)\rho^j = \rho^n$$

- O **Tempo Médio de Resposta** (Tempo no Sistema) pode ser calculado usando a **Lei de Little**:

$$E[n] = \lambda E[r] \quad N = \lambda \cdot T_{\text{sistema}}$$

$$E[r] = \frac{E[n]}{\lambda} = \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right) \frac{1}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1-\rho} = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{T_{\text{serviço}}}{1-\rho}$$

$$T_{\text{sistema}} = \frac{1}{1-\rho} \cdot T_{\text{serviço}}$$

25

Propriedades da Fila M/M/1

- A função distribuição de probabilidade acumulada (cdf) do **tempo de espera** é dada por:

$$F(w) = 1 - \rho e^{-w\mu(1-\rho)}$$

- **q**-percentil do tempo de espera:

$$w_q = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \ln \left(\frac{100\rho}{100-q} \right)$$

- Esta fórmula se aplica apenas se q for maior do que $100(1-\rho)$
- Todos os **postos percentis** mais baixos são zero.

28

Propriedades da Fila M/M/1

- **Tempo Médio de Resposta (Tempo Médio no Sistema)**

$$E[n] = \lambda E[r] \quad N = \lambda \cdot T_{\text{sistema}}$$

$$T_{\text{sistema}} = \frac{1}{1-\rho} \cdot T_{\text{serviço}} \quad T_{\text{sistema}} = T_{\text{serviço}} + T_{\text{espera}}$$

- **Tempo Médio de Espera (Tempo Médio na Fila)**

$$T_{\text{espera}} = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot T_{\text{serviço}}$$

26

Propriedades da Fila M/M/1

- **Número Médio de Clientes na Fila:**

$$E[n_q] = \lambda \cdot T_{\text{espera}} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

- O servidor é dito **ocioso** quando não houver nenhuma tarefa no sistema. Em todos os demais momentos ele é dito **ocupado**.
- O intervalo de tempo entre dois intervalos ociosos sucessivos é denominado de **período ocupado**.

29

Propriedades da Fila M/M/1

- A **função distribuição de probabilidade acumulada (cdf)** do tempo de resposta é dada por:

$$F_x(a) = P(x \leq a) \Rightarrow F(r) = 1 - e^{-r\mu(1-\rho)}$$

- O tempo de resposta é distribuído exponencialmente.

- **q**-percentil do tempo de resposta:

$$1 - e^{-r_q\mu(1-\rho)} = \frac{q}{100} \quad r_q = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \ln \left(\frac{100}{100-q} \right)$$

27

Exercício

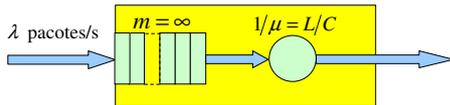
- Mensagens chegam de maneira independente a um sistema, numa taxa de **10 mensagens/minuto**. Os tamanhos das mensagens são exponencialmente distribuídas com média de **3600 caracteres**. Estas mensagens são transmitidas num canal com taxa de **9600bps**.

- Qual é o tempo médio de serviço ?
- Qual a taxa de chegada em mensagens/s ?
- Qual é a taxa de serviço ?
- Qual a utilização do servidor ?
- Qual a probabilidade de haver duas mensagens no sistema ?
- Qual o número médio de mensagens na fila ?
- Qual o número médio de mensagens no sistema ?
- Qual o tempo médio de espera ?
- Qual o tempo médio no sistema ?

30

Modelo Clássico para Tráfego de Dados

- 1 Servidor + Buffer Infinito
- Cliente = Pacote
 - Taxa de chegada de pacotes (pacotes/s)
 - L = Tamanho médio dos pacotes (unidades de dados)
- Servidor = Enlace
 - C = Velocidade do enlace (unidades de dados/tempo)
- Tempo de Serviço = Tempo de Transmissão dos Pacotes



31

Exemplo

- Considere um enlace entre dois roteadores. Assuma que:
 - Na média, 10 novos pacotes chegam em um segundo
 - O tamanho médio dos pacotes é 400 bytes
 - A velocidade do enlace é de 64kbps

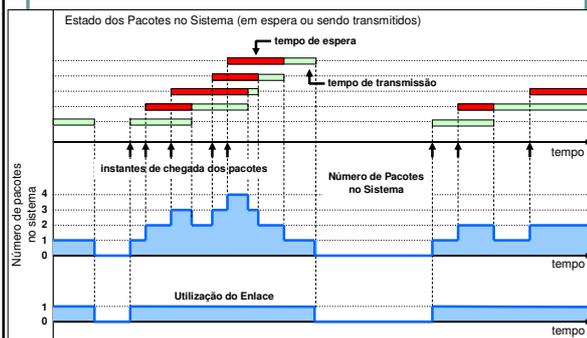
$$\rho = \frac{\lambda L}{C} = \frac{10 \cdot 400 \cdot 8}{64000} = 0,5 = 50\%$$

- Se a velocidade do enlace for aumentada para 128kbps:

$$\rho = \frac{\lambda L}{C} = \frac{10 \cdot 400 \cdot 8}{128000} = 0,25 = 25\%$$

34

Processo de Tráfego de Dados



Teoria de Filas

- Notação:
 - NS = Número médio de pacotes no sistema
 - NF = Número médio de pacotes na fila
 - TS = Tempo no sistema
 - TF = Tempo na fila
 - TA = Tempo de atendimento
- Teorema de Little - Aplicando o teorema obtemos as seguintes relações:

$$E[NS] = \lambda \cdot E[TS] \quad E[NF] = \lambda \cdot E[TF]$$

35

Carga de Tráfego

- Redes de Dados Computada por Pacotes

Tráfego = Pacotes

Taxa de Chegada = λ

Taxa de Serviço = $\mu = \frac{C}{L}$

Carga de Tráfego = $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda L}{C}$

- A carga de tráfego é adimensional

33

Modelo de Fila M/M/1

- Probabilidade de existirem n pacotes no sistema:

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (1 - \rho) \cdot \rho^n$$

- Número de pacotes na fila: $NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$
- Número de pacotes no sistema: $NS = E[n] = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho}$
- Número de pacotes sendo atendidos: $NS = NF + NA$

36

Modelo de Fila M/M/1

- Tempo Médio na Fila:

$$T_{espera} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot T_{serviço}$$

- Tempo Médio no Sistema:

$$T_{sistema} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{1 - \rho} \cdot T_{serviço} \quad NS = \lambda \cdot TS$$

- Tempo de Atendimento:

$$T_{sistema} = T_{espera} + T_{serviço} \quad T_{serviço} = 1/\mu$$

37

Exercício 1

- Resolução:

- Para 100 pacotes/s com tamanho médio de pacote de 1000 bytes, teremos uma taxa de $100 \cdot 1000 \cdot 8 = 800\text{kbps}$

$$TS = TF + TA \quad TF = 0,032$$

$$E[NF] = \lambda \cdot E[TF] \quad NF = 3,2$$

- Utilizando as equações do modelo M/M/1, se o buffer for dimensionado para 3200 bytes, as probabilidades de se ter 0, 1, 2 e 3 pacotes no sistema é dada por:

$$P_n = \rho^n \cdot (1 - \rho) \quad \begin{matrix} P_0 = 0,2 & P_2 = 0,128 \\ P_1 = 0,16 & P_3 = 0,1024 \end{matrix}$$

40

Exercício 1

- Considere uma interface de um roteador recebendo uma média de 100 pacotes/s. O tamanho médio dos pacotes é 1000 bytes. Os pacotes são transmitidos (roteados) para o enlace na taxa de 1Mbps. Considerando que o intervalo entre chegadas e o tamanho dos pacotes podem ser modelados utilizando a distribuição exponencial (M/M/1).

- Determine:

- O tempo médio de atraso dos pacotes devido à fila no roteador e o tempo médio entre a recepção do pacote e a sua transmissão.
- O número médio de pacotes no buffer.
- Se o buffer for dimensionado para suportar o número médio de pacotes, qual será a probabilidade de perda de pacotes ?

38

Exercício 1

- Resolução:

- A probabilidade de haver mais que 3 pacotes no sistema (probabilidade de perda) é calculada como:

$$P_{n>3} = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3) = 0,4096$$

- A probabilidade de descarte é de 41%

41

Exercício 1

- Resolução:

- Para 100 pacotes/s com tamanho médio de pacote de 1000bytes, teremos uma taxa de chegada de $100 \cdot 1000 \cdot 8 = 800\text{kbps}$
- O tempo de atendimento médio (TA) será $8000\text{bits}/1\text{Mbps} = 8\text{ms}$

$$TA = \frac{1}{\mu} = \frac{L}{C} = 8\text{ms} \quad \mu = \frac{C}{L} = 125$$

- Utilizando as equações do modelo M/M/1:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{100}{125} = 0,8 \quad NS = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho} = 4$$

$$NS = \lambda \cdot TS$$

$$TS = 0,04$$

39

Exercício 2

- Exercício 2 - Um concentrador recebe mensagens de um grupo de terminais e transmite através de uma única linha de transmissão. O sistema é modelado como uma fila M/M/1. O tempo médio entre chegadas das mensagens é de 4ms. O tempo médio de transmissão é de 3ms. Determine:

- Número médio de mensagens no sistema e o atraso total
- Qual aumento percentual na taxa de chegada resulta em dobrar o atraso médio total

$$NS = E[n] = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

$$TS = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad NS = \lambda \cdot TS$$

42

Exercício 2

- Resolução:

$$\lambda = 250 \text{ pacotes/s}$$

$$TA = \frac{1}{\mu} = 3ms \quad \mu \approx 333,33 \text{ pacotes/s}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,75 \quad NS = \frac{\rho}{1-\rho} = 3 \quad \text{Número médio de pacotes no sistema}$$

$$TS = \frac{NS}{\lambda} = 12ms \quad \text{Tempo médio dos pacotes no sistema}$$

43

Exercício 3

- Resolução:

$$\lambda = 125 \text{ pacotes/s}$$

$$TA = \frac{1}{\mu} = 2ms \quad \mu = 500 \text{ pacotes/s}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,25 \quad NS = \frac{\rho}{1-\rho} \approx 0,33 \quad \text{Número médio de pacotes no gateway}$$

$$TS = \frac{NS}{\lambda} \approx 2,6ms \quad \text{Tempo médio dos pacotes no gateway}$$

$$P\{n > 13\} = \rho^n = 3,72 \cdot 10^{-9} \approx 4 \text{ pacotes/bilhão de pacotes}$$

46

Exercício 2

- Resolução:

$$\lambda = 290 \text{ pacotes/s}$$

$$TA = \frac{1}{\mu} = 3ms \quad \mu \approx 333,33 \text{ pacotes/s}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,87 \quad NS = \frac{\rho}{1-\rho} \approx 6,7 \quad \text{Número médio de pacotes no sistema}$$

$$TS = \frac{NS}{\lambda} \approx 23ms \quad \text{Tempo médio dos pacotes no sistema}$$

16% de aumento na taxa de chegada.

44

Exercício 3

- Resolução:

- Para limitar a probabilidade de perda (descarte) para um valor $\leq 10^{-6}$

$$\rho^n = 10^{-6}$$

$$n = \log_{\rho}(10^{-6}) = \log(10^{-6}) / \log(\rho)$$

$$n > \log(10^{-6}) / \log(0,25) = 9,96$$

$$n > 9,96$$

47

Exercício 3

- Num gateway da rede, medidas mostram que os pacotes chegam numa taxa média de 125 pacotes/s e o gateway leva em média 2ms para encaminhar um pacote. Utilizando um modelo de fila M/M/1, analise o gateway.

- a) Qual a probabilidade de estouro do buffer se o gateway possui um buffer para apenas 13 pacotes ?
- b) Qual a capacidade do buffer para manter a taxa de perda de pacotes inferior a $1E-6$?

45

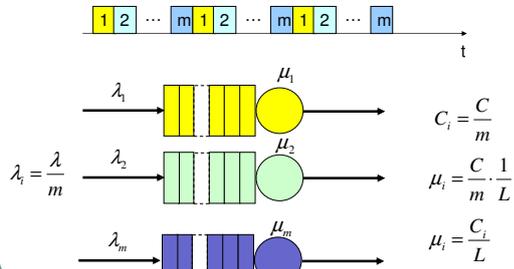
Exercício 4

- Exercício 4 - As requisições chegam a um servidor web a uma taxa de 30 requisições/s. Cada requisição gasta em média 0,02 segundos para ser processada. Determine:

- Qual a fração de tempo em que k ($k=0, 1, \dots$) requisições se encontram no servidor web ?
- Qual o número médio de requisições no servidor ?
- Qual o tempo médio de resposta no servidor ?
- Qual seria o tempo médio de resposta se o servidor fosse substituído por outro duas vezes mais rápido ?
- Qual seria o tempo de resposta se a taxa de chegada dobrasse quando o servidor fosse duas vezes mais rápido ?

48

Multiplexação TDM/FDM



49

Resumo dos Parâmetros da Fila M/M/1

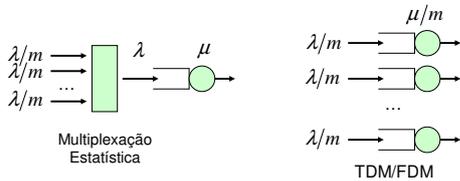
- 1 - Parâmetros
 λ = Taxa de chegada em tarefas por unidade de tempo
 μ = Taxa de serviço em tarefas por unidade de tempo
- 2 - Intensidade de Tráfego: $\rho = \lambda/\mu$
- 3 - Condição de Estabilidade: $\rho \leq 1$
- 4 - Probabilidade de zero tarefas no sistema: $p_0 = 1 - \rho$
- 5 - Probabilidade de n tarefas no sistema:
 $p_n = (1 - \rho) \cdot \rho^n \quad n = 0, 1, \dots, \infty$
- 6 - Número médio de tarefas no sistema: $E[n] = \rho/(1 - \rho)$
- 7 - Variância do número de tarefas no sistema: $Var[n] = \rho/(1 - \rho)^2$

52

Técnicas de Multiplexação

- Comparação: A **multiplexação estatística** possui **menor atraso** médio, mas **maior variância** de atraso. A multiplexação estatística elimina a necessidade de identificar o fluxo de tráfego associado com cada pacote.

$$TS_{SM} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad TS_{TDM} = \frac{1}{\mu/m - \lambda/m} = \frac{m}{\mu - \lambda} = m \cdot TS_{SM}$$



50

Resumo dos Parâmetros da Fila M/M/1

- 8 - Probabilidade de k tarefas na fila:

$$P(n_q = k) = \begin{cases} 1 - \rho^2 & k = 0 \\ (1 - \rho)\rho^{k+1} & k > 0 \end{cases}$$
- 9 - Número médio de tarefas na fila: $E[n_q] = \rho^2/(1 - \rho)$
- 10 - Variância do número de tarefas na fila:

$$Var[n_q] = \rho^2(1 + \rho - \rho^2)/(1 - \rho)^2$$
- 11 - Função distribuição acumulada do tempo de resposta:

$$F(r) = 1 - e^{-r\mu(1-\rho)}$$
- 12 - Tempo médio de resposta: $E[r] = (1/\mu)/(1 - \rho)$

53

Simulação de Fila M/M/1

- Utilizar simulador NS-2 (filamm1.tcl)
- Esboçar o cenário de simulação (nós+enlaces)
- O *intervalo entre chegadas* e o *tempo de serviço* seguem distribuição exponencial
- Identificar o tempo médio entre chegadas e o tempo médio de serviço (tamanho médio dos pacotes)
- Calcular analiticamente o número médio de pacotes na fila
- Utilizando os resultados de simulação, traçar o gráfico de comportamento do tamanho do buffer (coluna 5) versus tempo (coluna 1)

51

Resumo dos Parâmetros da Fila M/M/1

- 13 - Variância do tempo de resposta:

$$Var[r] = \frac{1/\mu^2}{(1 - \rho)^2}$$
- 14 - q -Percentil do tempo de resposta:

$$r_q = \frac{1}{\mu(1 - \rho)} \cdot \ln\left(\frac{100}{100 - q}\right) = E[r] \cdot \ln\left(\frac{100}{100 - q}\right)$$
- 15 - 90-Percentil do tempo de resposta: $r_q = E[r]$
- 16 - Função distribuição acumulada do tempo de espera:

$$F(w) = 1 - \rho e^{-w\mu(1-\rho)}$$

54

Resumo dos Parâmetros da Fila M/M/1

- 17 – Tempo médio de espera:
$$E[w] = \rho \frac{1/\mu}{1-\rho}$$
- 18 – Variância do tempo de espera:
$$Var[w] = (2-\rho)\rho / [\mu^2(1-\rho)^2]$$
- 19 – q -Percentil do tempo de espera:
$$\max\left(0, \frac{E[w]}{\rho} \ln[100\rho/(100-q)]\right)$$
- 20 – 90-Percentil do tempo de espera:
$$\max\left(0, \frac{E[w]}{\rho} \ln[10\rho]\right)$$

55

Resumo dos Parâmetros da Fila M/M/1

- 21 – Probabilidade de encontrar n ou mais tarefas no sistema: ρ^n
- 22 – Probabilidade de termos n tarefas em serviço num período ocupado:
$$\frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^{2n-1}}$$
- 23 – Número médio de tarefas servidas num período ocupado:
$$1/(1-\rho)$$
- 24 – Variância do número de tarefas servidas em um período ocupado:
$$\rho(1+\rho)/(1-\rho)^3$$
- 25 – Duração média do período ocupado: $1/[\mu(1-\rho)]$
- 26 – Variância do período ocupado: $1/[\mu^2(1-\rho)^3] - 1/[\mu^2(1-\rho)^2]$

56