Algoritmos para Projeto de Redes de Telecomunicações: Fila M/M/m

Programa de Pós-Graduação em Informática (PPGIa) - PUCPR

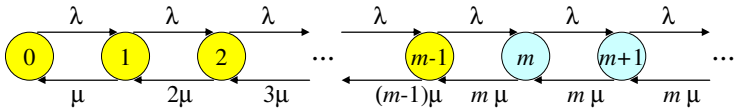
Prof. Marcelo E. Pellenz
http://www.ppgia.pucpr.br/~marcelo
marcelo@ppgia.pucpr.br

Fila M/M/m

- Aplicações
  - Modelagem de sistemas ou dispositivos multiprocessados que possuem vários servidores idênticos.
- Considerações
  - Todas as tarefas (clientes) esperando pelo atendimento dos servidores estão em uma única fila.
  - Assumir *m* servidores, cada um com taxa de serviço de μ

Fila M/M/m

- Existem *m* servidores idênticos e uma única fila:



- A fila é modelada como um processo de nascimento/morte onde:

$$\lambda_n = \lambda, \qquad n = 0,1,2,\ldots,\infty$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n = 1,2,\ldots,m-1 \\ m\mu, & n = m,m+1,\ldots,\infty \end{cases}$$

3

Teorema

- A probabilidade em regime permanente, p_n, de que um processo de nascimento e morte esteja no estado *n* é dada por:

$$p_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\,p_0, \qquad n = 1,2,\ldots,\infty$$

- A probabilidade p_0 é a probabilidade de que o sistema se encontre no estado zero (vazio).

4

Fila M/M/m

- Utilizando o teorema, obtemos:

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0, & n = 1,2,\ldots,m-1 \\ \dfrac{\lambda^n}{m!m^{n-m}\mu^n} p_0, & n = m,m+1,\ldots,\infty \end{cases}$$

- Em termos da utilização de cada servidor $\rho = \lambda/m\mu$:

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(m\rho)^n}{n!} p_0, & n = 1,2,\ldots,m-1 \\ \dfrac{\rho^n m^m}{m!} p_0, & n = m,m+1,\ldots,\infty \end{cases}$$

5

Fila M/M/m

- A probabilidade de não haver clientes no sistema é calculada pela relação:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

- Esta relação resulta em:

$$p_0 + p_0 \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \rho^{n-m} = 1$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$$

6

Fila M/M/m

- A probabilidade de que um cliente que chega tenha que esperar na fila (todos os servidores ocupados) é dada por:

$$C(m,\rho) = P(\geq m \text{ jobs}) = p_m + p_{m+1} + p_{m+2} + \cdots$$
$$= p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \rho^{n-m}$$
$$= p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}$$

- Para *m=1* (Servidor Único – Fila M/M/1), *C(m, ρ)* é dada por *ρ*.
- Esta distribuição é conhecida como Fórmula Erlang-C

7

Distribuição Erlang-C

- Aplicação no dimensionamento de *call center*
  - *C(c,a)* = Probabilidade de Atrasar uma Chamada
  - *c* = Número de Circuitos
  - *a* = Carga Total de Tráfego

$$C(c,a) = \frac{\frac{a^c \cdot c}{c!(c-a)}}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^c \cdot c}{c!(c-a)}}$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$$

$$C(m,\rho) = p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}$$

8

Distribuição Erlang-C

$$U = m\,\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad p_0 = \left[\frac{U^m}{m!\,(1-\frac{U}{m})} + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{U^n}{n!} \right]^{-1}$$

$$C(m,U) = p_0 \frac{U^m}{m!\,(1-\frac{U}{m})} = \frac{\frac{U^m}{m!\,(1-\frac{U}{m})}}{\frac{U^m}{m!\,(1-\frac{U}{m})} + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{U^n}{n!}} = \frac{\frac{m \cdot U^m}{m!\,(m-U)}}{\frac{m \cdot U^m}{m!\,(m-U)} + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{U^n}{n!}}$$

9

Distribuição Erlang-C

$$C(c,a) = \frac{\frac{a^c \cdot c}{c!(c-a)}}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^c \cdot c}{c!(c-a)}}$$

$$C(m,U) = p_0 \frac{U^m}{m!\,(1-\frac{U}{m})} = \frac{\frac{U^m}{m!\,(1-\frac{U}{m})}}{\frac{U^m}{m!\,(1-\frac{U}{m})} + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{U^n}{n!}} = \frac{\frac{m \cdot U^m}{m!\,(m-U)}}{\frac{m \cdot U^m}{m!\,(m-U)} + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{U^n}{n!}}$$

10

Número Médio de Clientes em Espera

- Número Médio de Clientes em Espera

$$E[n_q] = \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-m)\,p_n = p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-m)\rho^{n-m}$$

$$= p_0 \frac{(m\rho)^m \rho}{m!(1-\rho)^2} = \frac{\rho \cdot C(m,\rho)}{1-\rho}$$

$$E[n_q] = \frac{\rho \cdot C(m,\rho)}{1-\rho}$$

11

Número Médio de Clientes em Atendimento

$$E[n_s] = \sum_{n=1}^{m-1} n \cdot p_n + \sum_{n=m}^{\infty} m \cdot p_n$$

$$= 1\,p_0 \frac{(m\rho)}{1!} + 2\,p_0 \frac{(m\rho)^2}{2!} + \cdots + (m-1)\,p_0 \frac{(m\rho)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$+ m(p_m + p_{m+1} + p_{m+2} + \cdots +)$$

$$= m\rho\left(p_0 + p_0 \frac{(m\rho)}{1!} + p_0 \frac{(m\rho)^2}{2!} + \cdots + p_0 \frac{(m\rho)^{m-2}}{(m-2)!}\right) + mC(m,\rho)$$

$$= m\rho(p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-2}) + mC(m,\rho)$$

$$= m\rho[1 - p_{m-1} - C(m,\rho)] + mC(m,\rho)$$

$$= m\rho - m\rho p_{m-1} + mC(m,\rho)(1-\rho)$$

$$= m\rho \qquad \text{dado que } mC(m,\rho)(1-\rho) = mp_m = m\rho p_{m-1}$$

12

Número de Clientes no Sistema

- Número médio de clientes em Atendimento: $E[n_s] = m\,\rho$
- Número médio de clientes no sistema:

$$E[n] = E[n_q] + E[n_s] = \frac{\rho \cdot C(m,\rho)}{1-\rho} + m\rho$$

- Pode-se mostrar que a variância de n e n_q são dadas por:

$$\mathrm{Var}[n] = m\rho + \rho\, C(m,\rho)\left[\frac{1+\rho-\rho\, C(m,\rho)}{(1-\rho)^2} + m\right]$$

$$\mathrm{Var}[n_q] = \frac{C(m,\rho)\rho[1+\rho-\rho\, C(m,\rho)]}{(1-\rho)^2}$$

13

Tempos Médios

- Tempo médio de resposta usando a Lei de Little:

$$E[r] = \frac{E[n]}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{C(m,\rho)/m\mu}{1-\rho} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{C(m,\rho)}{m(1-\rho)}\right)$$

- Do mesmo modo, o tempo médio de espera em fila é dado por:

$$E[w] = \frac{E[n_q]}{\lambda} = \frac{C(m,\rho)}{m\mu(1-\rho)}$$

14

Tempo de Resposta

- Função Distribuição de Probabilidade do *tempo de resposta*:

$$F[r]=\begin{cases}1-e^{-\mu r}-\dfrac{C(m,\rho)}{1-m+m\rho}e^{-m\mu(1-\rho)r}-e^{-\mu r}, & \rho\neq(m-1)/m\\ 1-e^{-\mu r}-C(m,\rho)\mu r e^{-\mu r}, & \rho=(m-1)/m\end{cases}$$

- O tempo de resposta, *r*, não é exponencialmente distribuído, a não ser que *m=1*.
- Em geral, o coeficiente de variação, isto é, a razão entre o desvio padrão e a média de *r* é menor do que *1*.

15

Tempo de Espera

- A função distribuição de probabilidade do *tempo de espera* é dado por:

$$F(w)=1-C(m,\rho)e^{-m\mu(1-\rho)w}$$

- Dado que *w* possui uma função distribuição exponencial truncada, o posto percentil *q* pode ser calculado do seguinte modo:

$$w_q=\max\left\{0,\ \frac{1}{m\mu(1-\rho)}\cdot\ln\left(\frac{100\cdot C(m,\rho)}{100-q}\right)\right\}$$

16

Exercício 1

- Estudantes chegam a um laboratório de computação de acordo com a distribuição de Poisson a uma taxa média de 10 estudantes/hora. Cada estudante gasta em média 20 minutos no computador e assume-se que este tempo seja exponencialmente distribuído. O laboratório tem atualmente 5 computadores e alguns alunos têm reclamado que os tempos de espera são muito longos.

- a) Analise o laboratório usando um modelo de filas M/M/5
  - Taxa de Chegada \ Taxa de Atendimento \ Utilização Efetiva
  - Probabilidade de todos os terminais estarem *desocupados*
  - Probabilidade de todos os terminais estarem *ocupados*
  - Número médio de estudantes no laboratório (sistema)
  - Número médio de estudantes esperando na fila
  - Número médio de estudantes usando os computadores (Atendimento)
  - Média e Variância do tempo gasto no laboratório
  - Tempo médio de espera
  - O percentil 90 do tempo de espera

17

Exercício 1

- b) Os estudantes querem limitar o seu tempo de espera para uma média de 2 minutos e não mais do que 5 minutos em 90% dos casos.

- c) Isso é viável ? Se for, quantos computadores seriam necessários ?

18

Exercício 1

- a) O laboratório pode ser modelado como um sistema de fila M/M/5:
- Taxa de Chegada:

$$\lambda \approx \frac{10}{60} = 0{,}167 \text{ estudantes/minuto}$$

- Taxa de Atendimento:

$$\mu = \frac{1}{20} = 0{,}05 \text{ estudantes/minuto}$$

- Intensidade de Tráfego:

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{0{,}167}{5 \cdot 0{,}05} = 0{,}67$$

19

Exercício 1

- a) O laboratório pode ser modelado como um sistema de fila M/M/5:
- Probabilidade de todos os terminais estarem *desocupados*:

$$p_0 = \left[1 + \frac{(5 \cdot 0{,}67)^5}{5!(1-0{,}67)} + \frac{(5 \cdot 0{,}67)^1}{1!} + \frac{(5 \cdot 0{,}67)^2}{2!} + \frac{(5 \cdot 0{,}67)^3}{3!} + \frac{(5 \cdot 0{,}67)^4}{4!} \right]^{-1} = 0{,}0318$$

- Probabilidade de todos os terminais estarem *ocupados*:

$$C(m,\rho) = p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} = 0{,}0318 \frac{(5 \cdot 0{,}67)^5}{5!(1-0{,}67)} = 0{,}33$$

- Utilização média de cada terminal:

$$\rho = 0{,}67$$

20

Exercício 1

- a) O laboratório pode ser modelado como um sistema de fila M/M/5:
- Número médio de estudantes no laboratório (sistema):

$$E[n] = m\rho + \frac{\rho \cdot C(m,\rho)}{1-\rho} = 5 \cdot 0{,}67 + \frac{0{,}67 \cdot 0{,}33}{1-0{,}67} = 4$$

- Número médio de estudantes esperando na fila:

$$E[n_q] = \frac{\rho \cdot C(m,\rho)}{1-\rho} = \frac{0{,}67 \cdot 0{,}33}{1-0{,}67} = 0{,}65$$

- Número médio de estudantes usando os computadores (Atendimento):

$$E[n_s] = E[n] - E[n_q] = 4 - 0{,}65 = 3{,}35$$

21

Exercício 1

- a) O laboratório pode ser modelado como um sistema de fila M/M/5:
- Média e Variância do tempo gasto no laboratório:

$$E[r] = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{C(m,\rho)}{m(1-\rho)}\right) = \frac{1}{0{,}05}\left(1 + \frac{0{,}33}{5 \cdot (1-0{,}67)}\right) = 24$$

$$\mathrm{Var}[r] = \frac{1}{\mu^2}\left(1 + \frac{C(m,\rho)\left(2 - C(m,\rho)\right)}{m^2(1-\rho)^2}\right) = \frac{1}{0{,}05^2}\left(1 + \frac{0{,}33 \cdot \left(2 - 0{,}33\right)}{5^2 \cdot (1-0{,}67)^2}\right) = 479$$

- Tempo médio de espera:

$$E[w] = \frac{C(m,\rho)}{m\mu(1-\rho)} = \frac{0{,}33}{5 \cdot 0{,}55 \cdot (1-0{,}67)} = 4$$

22

Exercício 1

- a) O laboratório pode ser modelado como um sistema de fila M/M/5:
- O percentil 90 do tempo de espera é:

$$w_q = \max\left\{0, \frac{1}{m\mu(1-\rho)} \cdot \ln\left(\frac{100 \cdot C(m,\rho)}{100-q}\right)\right\} = 14$$

- Isso significa que 10% dos estudantes tem que esperar *mais que 14 minutos*.

23

Exercício 1

- b) Os estudantes querem limitar o seu tempo de espera para uma média de 2 minutos e não mais do que 5 minutos em 90% dos casos.
- Analisando o sistema com *m=6* computadores, mantendo as mesmas taxas de chegada e atendimento de *λ=0,167* e *μ=0,05*, temos:
- Intensidade de Tráfego: $\rho = 0{,}556$
- Probabilidade de todos os terminais estarem desocupados: $p_0 = 0{,}0346$
- Probabilidade de todos os terminais estarem ocupados: $C(m,\rho) = 0{,}15$
- Tempo médio de espera: $E\lfloor w_q \rfloor = 1{,}1 \text{ minutos}$
- O percentil 90 do tempo de espera: $w_q = 3$

24

M/M/1 vs. M/M/m

- Com *m* servidores, qual a melhor alternativa ?
  - Manter **filas separadas** para cada servidor
  - Manter **uma única fila** para todos os servidores
- Para chegadas de Poisson e tempos de serviço exponenciais:
  - *m* filas M/M/1 com taxa de chegada λ/m
  - Uma única fila M/M/m com taxa de chegada λ
- Vamos verificar que uma única fila é melhor quando as tarefas são homogêneos.

25

Exemplo

- No exemplo anterior, considere que os 5 computadores estão localizados em 5 diferentes unidades do campus, portanto é necessário manter filas separada para cada um.
- Neste caso, o sistema é modelado como 5 filas M/M/1 separadas. Usando *m*=1, *λ=0,167/5=0,0333* e μ=0,05, temos:

$$\text{Intensidade de tráfego } \rho = \frac{0{,}0333}{0{,}05} = 0{,}67$$

$$E[r] = \frac{1/\mu}{1-\rho} = \frac{1/0{,}05}{1-0{,}067} = 60$$

$$\text{Var}[r] = \frac{1/\mu^2}{(1-\rho)^2} = \frac{1/0{,}05^2}{(1-0{,}067)^2} = 3600$$

M/M/5
24
479

26

Exercício 2

- Num dado sistema, 24 terminais compartilham uma linha de transmissão de 9600 bps. Cada terminal envia 10 msgs/min. O tamanho das mensagens é exponencialmente distribuídas com um tamanho médio de 2000 bits.
- a) Qual o tempo médio que uma mensagem gasta no sistema ?
- b) Suponha que este tempo seja inaceitável. Uma solução possível é utilizar um canal adicional de 9600 bps e colocar 12 terminais em cada canal. Qual o tempo total no sistema agora ?
- c) Se os dois canais forem utilizados como um sistema de fila M/M/2, qual o tempo total no sistema ?
- d) Se os dois canais forem utilizados como um sistema de fila M/M/1, com taxa de 19200bps, qual o tempo total no sistema ?

27

Fila M/M/∞

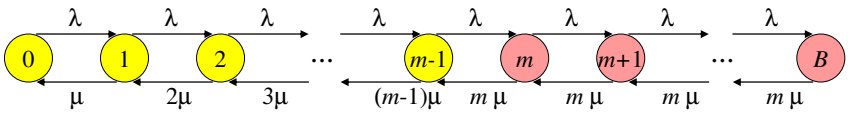
- Número infinito de servidores.
- É um caso especial das filas *M/M/m*.
- Os clientes nunca têm que esperar, pois há sempre um servidor disponível.
- O tempo de resposta é igual ao tempo de serviço.
- São também chamadas de **centros de atraso.**
- São utilizadas para representar recursos dedicados, tais como terminais num sistema de tempo compartilhado.
- Suas equações podem ser derivadas das utilizadas para filas *M/M/m*.

28

Fila M/M/m/B

Fila M/M/m/B (Buffer Finito)

- Número de posições na fila, B ($\geq m$), é finito
- Quando todas as posições estiverem ocupadas, as novas chegadas serão perdidas:



- Modelada como um processo de nascimento e morte, onde:

$$\lambda_n = \lambda, \qquad n = 0,1,2,\ldots,B-1$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n = 1,2,\ldots,m-1 \\ m\mu, & n = m,m+1,\ldots,B \end{cases}$$

30

Fila M/M/m/B

- Utilizando o Teorema, obtém-se:

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0, & n = 1,2,\ldots,m-1 \\ \dfrac{\lambda^n}{m!m^{n-m}\mu^n} p_0, & n = m,m+1,\ldots,B \end{cases}$$

- Em termos da intensidade de tráfego $\rho=\lambda/m\mu$:

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(m\rho)^n}{n!} p_0, & n = 1,2,\ldots,m-1 \\ \dfrac{\rho^n m^m}{m!} p_0, & n = m,m+1,\ldots,B \end{cases}$$

31

Fila M/M/m/B

- A probabilidade de não haver clientes no sistema é calculada pela relação:

$$\sum_{n=0}^{B} p_n = 1$$

- Esta relação em:

$$p_0 + p_0 \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \sum_{n=m}^{B} \rho^{n-m} = 1$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{(1-\rho^{B-m+1})(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$$

32

Número Médio de Clientes

$$E[n] = \sum_{n=1}^{B} np_n$$

$$E[n_q] = \sum_{n=m+1}^{B} (n-m)p_n$$

- A variância e outras estatísticas de *n* e n_q podem ser calculadas de forma semelhante.

33

Taxa Efetiva de Chegadas

- Todas as chegadas que ocorrem enquanto o sistema está cheio *(n=B)* são perdidas.
- A taxa de tarefas que efetivamente entram no sistema é dada por:

$$\lambda' = \sum_{n=0}^{B-1} \lambda \cdot p_n = \lambda \sum_{n=0}^{B-1} p_n = \lambda(1 - p_B)$$

- A diferença $\lambda - \lambda' = \lambda\, p_B$ representa a **taxa de perda de pacotes**.

34

Tempos Médios

- Tempo médio de resposta usando a Lei de Little:

$$E[r] = \frac{E[n]}{\lambda'} = \frac{E[n]}{\lambda(1 - p_B)}$$

- Do mesmo modo, o tempo médio de espera é dado por:

$$E[w] = \frac{E[n_q]}{\lambda'} = \frac{E[n_q]}{\lambda(1 - p_B)}$$

35

Utilização da Fila M/M/m/B

- Se observarmos o sistema por um tempo longo, por exemplo, T segundos:
  - O número total de clientes chegando e recebendo serviço será $\lambda' T$
  - O tempo total ocupado dos m servidores para atender estes clientes será de $\lambda' T/\mu$
  - A utilização de cada servidor será dada por:

$$U = \frac{\text{tempo ocupado por servidor}}{\text{tempo total}}$$

$$= \frac{(\lambda' T / \mu)/m}{T} = \frac{\lambda'}{m\mu} = \rho(1 - p_B)$$

  - p_B é a probabilidade de o sistema estar cheio

36

Fórmula de Perdas de Erlang

- Em um sistema M/M/m/m, o tamanho do buffer é exatamente igual ao número de servidores. A probabilidade de perda é dada por:

$$p_m = \frac{(m\rho)^m}{m!} p_0 = \frac{(m\rho)^m / m!}{\sum_{j=0}^{m} [(m\rho)^j / j!]}$$

- As fórmulas aqui apresentadas podem ser reduzidas ao caso de m=1 servidor, caracterizando um sistema M/M/1/B.

37